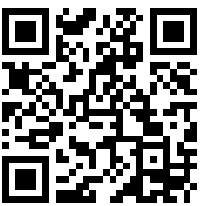
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

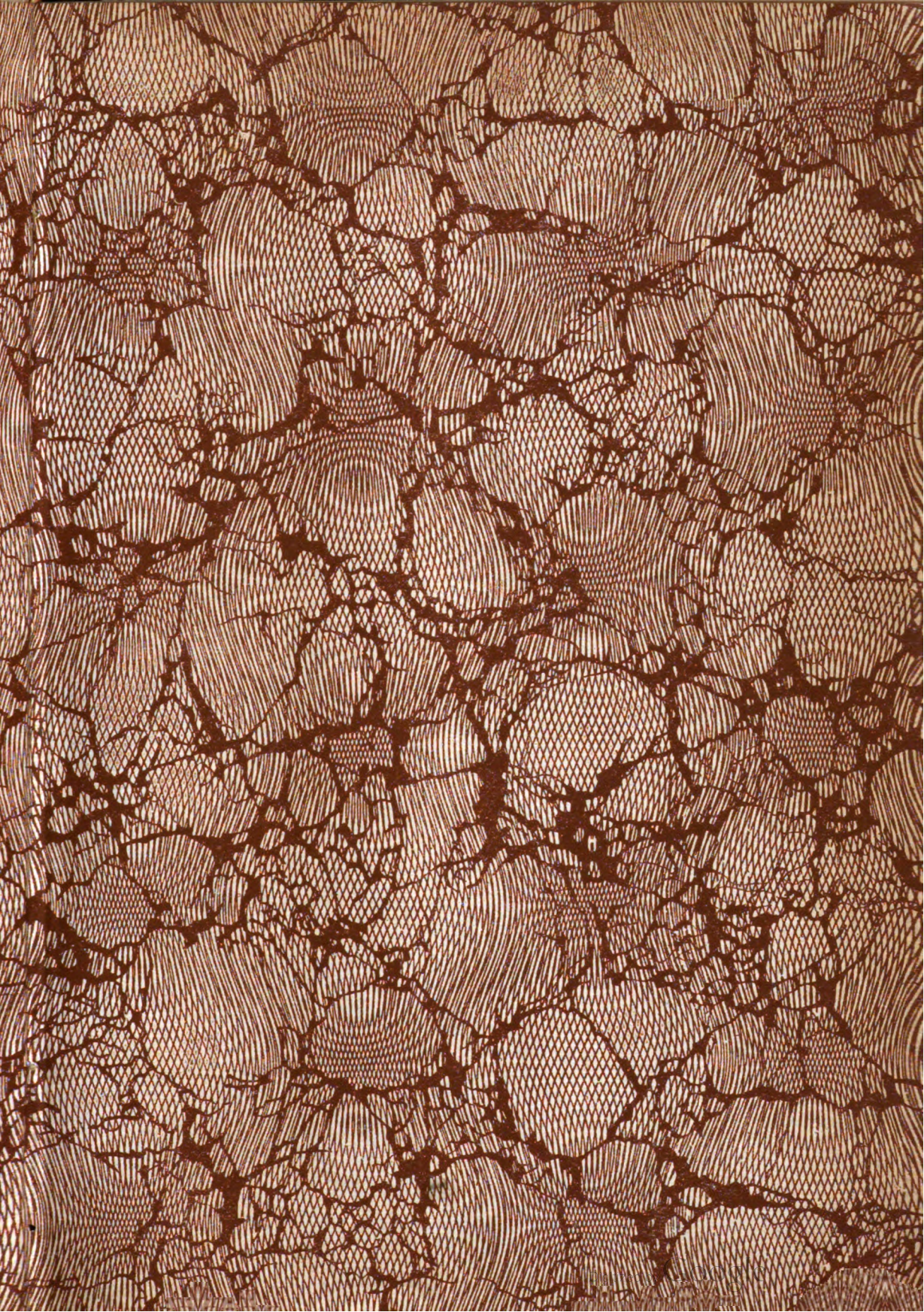
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google



Digitized by Google

Cornell 11.394

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO VII.

1904

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.
1904

Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

C. BRUHNS

Direttore dell' Osservatorio e Professore di Astronomia in Lipsia

NUOVO MANUALE
LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CON

SETTE DECIMALI

5.ª Edizione

L. 5,50.

E. T. KÖHLER

MANUALE
LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CONTENENTE:

I Logaritmi volgari o di Brigg
di tutti i numeri fino a 10800 con sette decimali.
I Logaritmi di Gauss.
I Logaritmi delle Funzioni Trigonometriche
di dieci in dieci secondi
per i primi ed ultimi nove gradi del quadrante
e di minuto in minuto per gli altri gradi.
Le formole goniometriche ed altre tavole matematiche
che spesso occorrono nei calcoli

II.ª Edizione della Versione Italiana

L. 4.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

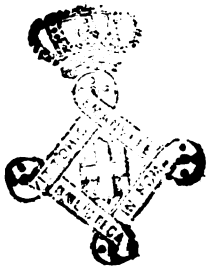
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO VII.

1904

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.
1904

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. — Tipografia Sordomuti

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 85, 86.
Adam 32.
Adams 96.
Addi 51.
Agucchi 95.
d'Alembert 52, 53, 54, 55, 75.
Alexandroff 123.
Almansi 111.
Amaldi 16, 24, 121.
Amos 45.
Andoyer 62.
Andrade 127.
Appell 56.
Archimede 21, 33, 39.
Argand 85.
Arisi 26, 27 *n.*
Aronhold 8, 86.
Arneth 120.

Bachet 69, 78.
Bäcklund 46, 47.
Ball Stawell 15.
Baltzer 74, 98.
Barrow 114.
Battaglini 29.
Bauer 84, 86.
Bauersgarten 91.
Bellavitis 74.
Beltrami 23, 24, 40, 41, 43, 64, 77, 78 *n.*, 123.
Bernoulli Giac. 58, 62, 72.
» Giov. 62, 72.
Bers 128.
Betti 109, 110.
Bianchi 39, 48, 55, 56.
Binoux 62.
Boccardini 31.
Böhmer 2 *n.*
Börsch 123, 126.
Boezio 27 *n.*
du Bois-Reymond E. 77, 79.
» P. 121.
Boggio 113.
Boltzmann 91, 127.
Bonaini 4, 5 *n.*
Bonagiis Bartolommeo 7.
» Benedetta 7.
» Bonaccius 7.
» Bartolommeo 7.
» Bindus 7.
» Fia 7.
» Giovanni 7.
» Iacopa 7.
» Iacopo 7.
» Giovanni 7.
» Miniatus 7.
» Noechus 7.
» Piero 7.
» Pietro 7.
» Tommaso 7.
Boncompagni 4 *n.*, 26, 29.
Booth 75.
Bordigallo 26.
Bordin 62.
Borel 88, 91, 121.
Borelly 62.
Boschowich 74.
Bossut 75.
Boussinesq 110.
Boutroux 90, 127.
Braunmühl 71-75, 126.
Brendel 123.
Bretschneider 75.
Briggs 72, 118.
Brill 64, 126.
Brioschi 29, 98.
Brouncker 72.
Bürgi 71.
Bunsen 28.
Burali-Forti 91, 95.
Bustelli 63.
Cagnoli 74.
Campbell 62.
Campi 26.
Campofregoso 6.
Candido 82.
Cantelli 26.
Cantor M. 1, 4 *n.*, 28 *n.*, 113, 126.
Capelli 24, 26, 31, 118, 126.
Capocci 3.
Carlo Magno 2.
Carvallo 56.
Carnot L. 74, 109.
» S. 32.
Carra de Vaux 128.
Carraresi 3 *n.*
Catania 91.
Cauchy 34 *n.*, 69, 85, 86, 89, 90, 98, 108, 109, 121, 125.
Cavalieri 72, 114.
Cayley 41, 96, 38.
Cerruti 63, 110, 110 *n.*, 111.
Chini 115, 116.
Claparède 32.
Clebsch 8, 112.
Clifford 9, 42.
Christoffel 39, 40, 42.
Clausius 127.
Codazzi 40, 42.
Combescure 39, 47.
Cotta 26, 27, 27 *n.*
Côtes 72, 74.
Couturat 127.
Cramer 98.
Cremona 29.
Cristo 50, 52.
Cunningham 71.
Curtze 26, 28, 29, 95.
Czuber 56, 61.

Damoiseau 62.

Digitized by Google

Daniele 76.
Darboux 41, 42, 43, 45.
Dati 114 *n.*
Dedekind 67, 117.
Delambre 75.
Delitsch 49.
Descartes 32, 114.
Dirichlet (*vedi* Lejeune-Dirichlet).
Doehlemann 85.
Duhamel 122.
Duhem 51 *n.*, 128.
Dupin 41.
Durège 75.

Eisenstein 67.
Elvius 72.
Encke 85.
Engel 86, 87.
Enriques 16, 21, 76.
Erone 128.
Esdra 49.
Euclide 3, 4, 22 23 *n.*, 38, 67, 68, 69, 72.
Eulero 41, 68, 69, 71, 73, 73 *n.*
Ewald 52.

Fabbroni 114 *n.*
Faulhaber 72.
Faure 75.
Favaro 20, 95
Federico II 1, 2, 3
Fehr 126
Feier 125.
Fermat 68, 69, 70, 77, 114 119
Ferrari L. 119.
Fibonacci Alberto 7.
» Bartolommeo 7.
» Bonaccio 7.
» Bonnacingo 7.
» Bonito 7.
» Giovanni 7.
» Guglielmo 7.
» Leonardo 1, 7, 68.
F. G. M. 31.
Fineo 8°.
Finsterwalder 126.
F. J. 88.
Fleischer 76 *n.*
Foucault 56.
Fourier 125.
Francoeur 62.
Frenet 42.
Frenicle 70.
Freycinet 51 *n.*
Fricke 86.
Frobenius 69.
Fuchs 63.
Fürle 94.
Fuss 71.

Galileo 95.
Galois 66, 85, 86.
Gassendi 128.
Gauss 40, 42, 66, 68, 69, 70, 71, 74, 98, 108, 118, 119, 122, 123, 125.
Gay 64
Gazzaniga 66, 71.
Gegenbauer 29, 30, 93, 93 *n.*, 94.
Geiser 126.
Geissler 95.
Gellibrand 72
Genocchi 69.
Giambelli 76
Gibbs 29. 127.
Giobbe 49 50.
Giovanni da Palermo 1, 2, 3.
Giudice 87.
G. L. (*vedi* Loria).
Glaisher 75.
Gompertz 59, 60.
Gräffe 85.
Graf 49.
Green 107, 110, 125.
Greenhill 126.
Gregory 72.
de la Grye 32.
Grunert 29.
Gubler 126.
Guccia 126.
Gudermann 75.
Günther 29 *n.*, 75.
Güntsche 94.
Guichard 41. 45, 46, 126.

Hadamard 62, 85, 126.
Hamburger 63, 95.
Hamilton 53, 54, 70, 74, 100.
Hart 47.
Hartmann 129
Hatt 32.
Hauck 126.
Hauber 84.
Hazzidakis 46.
Heiberg 36 *n.*
Helmholtz Anna 77 *n.*, 79.
» Fritz 79.
» H. 77-79.
» R. 79.
Hensel 97, 106.
Herigone 72.
Hermann 32, 73.
Hertz 55, 79.
Hesse 28.
Hessemberg 95.
Hilbert 62, 124, 126.
Hölder 35 *n.*, 38.
Hoepli 107.
Hooke 108.
Horrebow 91.
Hudde 114.
Hudson 75.
Humboldt 49, 50.
Hurwitz 125.
Huygens 72, 114, 123.

Isaia 49.
Itelson 127.

Jacobi 53, 56, 125.
Jahnke 95.
Joachimsthal 45, 47.
Jouffret 83.

Kepler 72, 114,
Kirchhoff 28, 54.
Klein 7, 71, 75, 77, 86, 126.
Klügel 73.
Kneser 126.
Knoblauch 95.
Koch 90.
Königs 15.
Königsberger 63, 77, 79.
Kötter 95.
Koppe 95.
Krazer 61, 92.
Kronecker 67, 69, 91, 97, 106, 119.

Digitized by Google

Krüger 123.
Kübler 87, 88.
Kummer 67.
Kundt 79.
Kuenen 49.

Lagny 72, 73.
Lagrange 53, 54, 55, 56, 68, 69, 70, 74, 75, 82 *n.*, 85, 86, 98, 119, 125.
Lalande 62.
Lambert 72, 74.
Lamé 32, 107, 108.
Lampe 64 *n.*, 95.
Landau 95
Landry 71.
Lang 93.
Laplace 71, 106, 110.
Lazzarini 1.
Lebesgue 67, 121, 122.
Lebon 31.
Lecornu 43.
Legendre 68, 69, 70, 74.
Leibniz 68, 98, 114.
Lejeune-Dirichlet 67, 68, 107.
Lemoine 62, 75.
Lenbach 77 *n.*
Levi-Civita 107, 123.
Lexell 74.
Lhuillier 74, 75.
Libri 4 *n.*
Lie 9, 63, 66, 86, 87.
Lindelöf 90, 126.
Lindemann 75.
Liouville 41, 125.
Lipschitz 125.
Loewy 84.
Lorentz
Loria 62, 66, 79, 82, 83, 84, 106, 115, 123, 124, 126.
Lucas Edoardo 67.
» Enrico 76.
Lüroth 28 *n.*, 126.
Lukat 39 *n.*

Mach 33, 33 *n.*, 34, 35, 35 *n.*, 37.
Machin 73.
Maillet 91.
Maimonide 52.
Mainardi 26, 28.
Maggi 52, 56.
Magnus 77.
Makeham 59.
Mannheim 15.
Mansion 91.
Marcolongo 56, 107, 113.
Matrot 70.
Mathieu 107.
Mayer 74.
Mehmke 64.
Menelao 74.
Mentré 128.
Meunier 41.
Meyer Fr. 75, 126.
Milanesi 4 *n.*
Millet-Deschales 72.
Mittag-Leffler 80, 126
Mobius 15, 34, 74.
de Moivre 72.
Mommsen 114.
Monge 88.
del Monte 114 *n.*
Montucla 4 *n.*
de Morgan 60.
Moreley 126.
Morera 127.
Mosè 49.
Moutard 43, 44.
Muller F. 30.
» C. H. 28.
Muir 96.

Navier 109.
Neper 71, 72, 118.
Netto 126.
Neumann C. 108, 125.
» F. 28.
Newton 53, 64, 72, 73. 107, 114.
Nieveuglowski 70.
Novati 28.

Orlando 21.
Ozanam 72.

Paciuolo Luca 88
Painlevé 126.
Pappo 26 *n.*
Pascal B. 68, 114.
» E. 86, 87.
Peano 67, 68, 70, 91.
Pell 119.
Pericle 88.
Pervouchine 71.
Peterson 43.
Petit d'Ormoys 62.
Petzwald 29, 30, 93.
Pfeiffer 95.
Picard 66, 89, 107.
Pincherle 83.
Pisano Leonardo (*vedi* Fibonacci .
Pitagora 18.
Pizzetti 61.
Planck 127.
Plateau 46.
Plücker 9.
Poincaré 41, 123.
Poisson 58, 86, 107, 107, 125.
Poncelet 62.
Pontecoulant 62.
Porro 52.
Pressler 88.

Quetelet 75.

Ramorino 95.
Reichel 83.
Renaldini 72.
Reuss 49.
Reyes y Prosper 127.
Ribaucour 44, 45.
Ricci 39, 40.
Richelot 28.
Riemann 40, 121, 125.
Rimini 46.
Roberts 47.
Roberval 114.
Robin 80.
Römer 94.
Rossi 5.
Rothe 95.
Runge 126.

Saccheri 30.
Salomone 48, 51.
Samuel (Rabbi) 51.
Scheeffer 122.

Digitized by Google

Scheffers 63, 86.
Schiaparelli 29, 48, 52, 59.
Schilling 64.
Schooten 126.
Schröder 28.
Schubert H. 82, 126.
» T. 74
Schur 40, 126.
Schuster 123.
Schwarz 40, 12[illegible].
Seelhoff 71.
Segre 10, 76, 126.
Seliwanoff 122, 126.
Sella 29.
Serret A. 122.
» P. 74.
Siacci 69.
Siemens 78.
Silva 30.
Sitoni 27 *n.*
Sluse 114.
Smith F. P. 29.
» H. J. S. 69.
Somigliana 110, 111, 116.
Sovero 72.
Spinoza 127.
Stäckel 126.
Staudt 75.
Stefan 91.
Stephanos 75.
Steinitz 95.
Stokes 96.
Stolz 91.
Study 8, 16, 75.
Sturm C. 85.
St. Venant 111, 112.
St. Vincenzo 114.

Tacquet 72.
Talete 22.
Tanfani 6 *n.*, 7 *n*
Tannery J. 80, 82.
» P. 31, 32, 8[illegible], 8[illegible] *n*, 82, 123, 128.
Taylor 89.
Tchebycheff 46, 69.
Tedone 111.
Teodoro 3.
Thomson W. 78, 95.
Thybaut 46
Tolomeo 74.
Torporley 71.
Torricelli 114, 114 *n.*
Townsend 75.
Treutlein 126.
Tricker 2 *n.*

Unvergatz 75.

Vacca 71.
Vailati 16, 30, 33, 12[illegible], 128.
Vaillant 62.
Vairani 26.
Valerio Luca 16.
Valle (della) 27, 27 *n.*
Valz 62.
Vandermonde 78.
Vessiot 66.
Vida 26.
Vivanti 16, 80, 87, 91, 92, 122
Viviani 70.
Vlack 72
Vleck 126.
Voigt 109, 112.
Volterra 96, 107, 126

Wallis 68, 72, 114.
Waring 82.
Weber H. 67, 115, 121.
Weingarten 41, 42, 43, 44, 45, 63, 107, 108.
Weierstrass 41, 46, 63, 93, 125.
Weiss 93.
Wheastone 118.
Wellhausen 49.
Wellstein 116, 121.
Wienecke 95.
Wiener 64.
Wilson 68, 119.
Wirtinger 126.
Wittstein 59.

Zeller 69, 115.
Zeuthen 62, 113, 115, 126, 128.
Zoretti 89.

Digitized by Google

INDICE

M. Lazzarini. Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia, p. 1-7.
G. Vailati. La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro primo sull'equilibrio delle figure piane, p. 33-39.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

Study. Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie [E. Daniele], p. 8-16. — **Enriques e Amaldi.** Elementi di geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori [G. Vailati], p. 16-24. — **Capelli.** Istituzioni di analisi algebrica [G. Vivanti], p. 24-26. — **Bianchi.** Geometria differenziale [C. Rimini], p. 39-48. — **Schiaparelli.** L'astronomia nell'antico testamento [F. Porro], p. 48-52. — **Maggi.** Stereodinamica [R. Marcolongo], p. 52-56. — **Czuber.** Wahrscheinlichkeitsrechnung [P. Pizzetti], p. 56-61. — International Catalogue [G. L.], p. 61-62. — **Bianchi.** Teoria dei gruppi [G. L.], p. 65-66. — **Gazzaniga.** Teoria dei numeri, [G. Vacca], p. 66-71. — **Braunmühl.** Vorl. ub. Geschichte der Trigonometrie. II. [G. L.], p. 71-75. — **Enriques.** Geometria proiettiva [G. Z. Giambelli], p. 76. — **Koenigsberger.** Helmholtz. II, III [G. L.], p. 77-79. — **Robin.** Oeuvres scientifiques [G. Vivanti], p. 80. — **J. et P. Tannery.** Notions de mathématiques [G. L.], p. 80-82. — **Candido.** La formola di Waring [G. L.], p. 82. — **Schubert.** Logarithmen [G. L.], p. 82-83. — **Reichel.** Vorstufen [G. L.], p. 83. - **Jouffret.** Géométrie à quatre dimensions [G. L.], p. 83. — **Hauber.** Statik [G. L.], p. 84. — **Lecvy.** Versicherungsmathematik [G. L.], p. 84. — **Bauer.** Algebra [U. Amaldi], p. 84-86. — **Pascal.** I gruppi continui di trasformazioni [G. Vivanti], p. 86-87. — **Kübler.** Die Prop des gold. Schnittes [G. L.], p. 87-88. — **Müller und Presler.** Projektionslehre [G. L.], p. 88. — **Borel.** Fonctions méromorphes [G. Vivanti], p 89-91. — **Catania.** Aritmetica razionale [C. Burali-Forti], p. 91. — **Krazer.** Thetafunktionen [G. Vivanti], p. 92. - **Vivanti.** Funzioni modulari, p. 92. — **Kronecker.** Vorlesungen über Mathematik. II 2 [G. L.], p. 97-106. — **Marcolongo.** Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici [T. Boggio], p. 107-113. — **Zeuthen.** Geschichte der Mathematik [G. L.], p. 113-115. — **Chini.** Corso speciale [C. Somigliana], p. 115-116. — **Weber und Wellstein.** Encyklopädie I [U. Amaldi], p. 116-121. — **Lebesgue.** Fonctions primitives [G. Vivanti], p. 121-122. — **Seliwanoff.** Differenzenrechnung [G. Vivanti], p. 122. — **Gauss.** Werke IX [G. L.], p. 122-123. — **Bucherer.** Vektor-Analysis [G. L.], p. 123. — **Alexandroff.** Aufgaben [G. L.], p. 123. — **Hilbert.** Grundlagen [G. L.], p. 124.

Digitized by Google

PROGRAMMI E RIASSUNTI

DI CORSI UNIVERSITARI.

Università di Bologna: Corso di matematiche superiori 1903-1904 [Prof. C. Arzelà], p. 24-25.

NOTIZIE.

Un agrimensore cremonese del sec. XI: Leonardo Mainardi e la sua opera. — Ernesto Schröder. — Massimiliano Curtze — J. W. Gibbs. — Un austriaco dimenticato. — Una nuova Rivista di matematica. — Per la storia del giornalismo matematico. — Pubblicazioni concernenti G. Saccheri. — Biblioteca scolastica. — Secondo Congresso di Filosofia. - Riproduzioni diplomatiche di classici. — Corrispondenza scientifica di Descartes. — *Annuaire pour l'an 1904 publié par le Bureau des Longitudes*, p. 26-32.

I premi dell'Istituto di Francia. — Tema proposto dal Politecnico di Monaco per l'anno 1904. — Un'opera in preparazione. — Meyer Hamburger. - Esposizione di modelli di matematica. — Una nuova collezione di modelli di geometria, p. 62-64.

L. Gegenbauer. — Questione di storia dell'astronomia. — Calcolo delle probabilità. — Tema proposto dall'Accademia di Madrid. — Società matematica di Berlino. — Biblioteca scolastica. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Bibliografia dei determinanti — G. G. Stokes, p. 93-96.

III Congresso intern. di matematica. — Tema di concorso proposto dalla Facoltà di Gottinga. — Sulla matematica dei Giapponesi. — Tema proposto dall'Accademia del Belgio. — II Congresso di Filosofia. — Tema posto a concorso dal R. Istituto Veneto, p. 126-128.

Digitized by Google

ANNO VII. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1904.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Pinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

M. LAZZARINI: *Leonardo Fibonacci, le sue opere e la sua famiglia* (continuazione e fine).

Recensioni ed annunzi: E. STUDY, *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie* continuaz. e fine) [E. Daniele]. — J. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori* [G. Vailati]. — A. CAPELLI, *Istituzioni di analisi algebrica* [G Vivanti].

Notizie: Un agrimensore cremonese del secolo XI: Leonardo Mainardi e la sua opera. — Ernesto Schröder. — Massimiliano Curtze. — J. W. Gibbs. - Un austriaco dimenticato. — Una nuova Rivista di matematica. — Per la storia del giornalismo matematico. — Pubblicazioni concernenti G. Saccheri. — Biblioteca scolastica. — Secondo Congresso di Filosofia. — Riproduzioni diplomatiche di classici. — Corrispondenza scientifica di Descartes. — *Annuaire pour l'an 1904 publié par le Bureau des Longitudes.*

LEONARDO FIBONACCI,

LE SUE OPERE E LA SUA FAMIGLIA

DI

MARIO LAZZARINI

(Continuazione e fine; v. Anno VI, p. 102)

Ed eccoci ora alle questioni proposte a Leonardo da Maestro Giovanni Palermitano, questioni che hanno dato origine alle due opere minori di Leonardo, il *Flos* e il *Liber Quadratorum*. È incerto chi sia questo Giovanni da Palermo, filosofo dell'imperatore: potrebbe però, con grande probabilità, essere, come ritiene il Cantor, quel notaio e consigliere di Federico II, che nel Maggio del 1221, a Catania, fece un atto a favore di un convento nei pressi di Messina, atto convalidato poi dall'imperatore nel 1240. Di lui si ha una « Historia diplomatica Friderici II imperat. II per manus Joannis de Panormo notarii et fidelis nostri ». Certamente fu anche un buon matematico se egli stesso propose a Leonardo i problemi in discorso:

Digitized by Google

non sarebbe però nemmeno improbabile che egli li avesse proposti per suggerimento di un amico. Quanto all'anno in cui ciò avvenne, la questione è controversa: è vero che il *Liber Quadratorum* porta la data del 1225, ma in più luoghi, tanto del *Flos* che del *Liber Quadratorum,* Leonardo ci dice che dette questioni gli furono proposte da Maestro Giovanni, nel palazzo dell'imperatore in Pisa, *alla presenza di Federico stesso.* Ora, come può spiegarsi questo fatto, se non si ha traccia alcuna del passaggio di Federico da Pisa prima del luglio 1226? Infatti dai *Regesta Imperii* sappiamo che, tra il 1218 e il 1220, Federico II è in Germania, donde, precisamente nell'agosto 1220, viene in Italia, e per Bolzano, pel Modenese, Bologna, Faenza ecc. va a Roma, dov'è incoronato imperatore: quindi scende nell'Italia meridionale e Sicilia nel 1221 (1). Resta in Sicilia e nell'Italia meridionale fino al 1226 (2). Poi sale nell'Italia centrale, e per Rimini, Faenza, Parma, Borgo S. Donnino, Cremona, Pontremoli (luglio 1226) e Sarzana, va a Pisa nel detto mese di luglio. « Hieher unter geleite der ihm von Pisa nach Pontremoli entgegengesandten Truppen ». [Qui (a Pisa) (resta o va) sotto la scorta delle truppe mandategli incontro da Pisa a Pontremoli] (3).

Dopo questa prima volta Federico tornò in Pisa nel Dicembre 1239, Agosto 1244, Maggio 1245, Aprile 1247 e Maggio 1249. Seguendo i registri, è dunque impossibile stabilire la data precisa dell'incontro di Leonardo con Giovanni da Palermo: e quindi tutti gli storici di Leonardo sono portati a concludere che, o Federico II è stato in Pisa anteriormente al 1226 (cosa improbabile, perchè, come ho mostrato, dalla sua venuta in Italia se ne può seguire i passi giorno per giorno), oppure che è errata la data apposta al *Liber Quadratorum.* Per me invece non sussiste nè l'una nè l'altra di queste due cose, potendosi benissimo conciliare la data 1225 di Leonardo con quella 1226 dei cronisti imperiali. Rammentiamo per questo che, mentre presso la massima parte delle nazioni usavasi principiare l'anno dal 1.° gennaio o dal 25 dicembre (come, ad esempio, la Germania dopo Carlo Magno), Firenze e Pisa invece avevano un calendario speciale. Così, Firenze, fino dal X secolo aveva adottato il sistema di dar principio all'anno col 25 marzo, giorno dell'Incarnazione, con un ritardo di 2 mesi e 25 giorni sul computo attuale. Questo stile, seguito da altre città e terre toscane, come Siena, Prato, Colle di Valdelsa, Sangimignano, Samminiato dopo la sottomissione, ed altre, ed anche da alcuni papi,

(1) Böhmer: *Regesta Imperii,* ed. da Julius Tricker, vol. V, fasc. 1.° (1198-1221). Innsbruck, Wagner'sche Universitäts-Buchhandlung. 1879.

(2) Id., vol. V, fasc. 2.° (1222 e seg.) — Innsbruck, Wagner'sche Universitäts-Buchhandlung, 1881, pag. 322.

(3) Ivi, pag. 337.

Digitized by Google

rimase in vigore fino al 1.° gennaio 1750, nel qual giorno fu adottato per tutta la Toscana il computo comune. Così Pisa cominciava pure l'anno dal 25 marzo; ma ritardava di un anno sul computo fiorentino: si ha dunque un ritardo di un anno, due mesi e 25 giorni sul computo attuale (1). Questo ci spiega come Leonardo possa dire di essere stato alla presenza dell'imperatore Federico II nel 1225, corrispondendo appunto il luglio 1226, epoca della prima andata di Federico in Pisa, secondo il computo comune, al quarto mese del 1225, secondo il calendario pisano.

Quali sono ora le questioni in discorso? A questo possiamo rispondere con certezza: due sono le principali « .... ut inveniretur quadratus numerus aliquis, cui addito vel diminuto quinario numero, egrediatur quadratus numerus » donde il Libro dei Quadrati, ed « .... ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti » donde il Commento al X.° di Euclide, che, insieme con le altre due questioni proposte da M.° Giovanni « De tribus hominibus pecuniam comunem habentibus » e « De quatuor hominibus et bursa ab eis reperta » che Leonardo risolve e commenta applicando poi i metodi di risoluzioni trovati a molteplici questioni, con la lettera a M.° Teodoro circa la questione « De avibus emendis secundum proportionem datam » in cui si contengono le prime traccie dell'Analisi indeterminata, e con l'altra questione « De compositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum » costituiscono il *Flos* (2). Quest'opera, come si vede, non è dunque altro che una raccolta di problemi e ricerche fatte in tempi diversi, un libretto compilato, come ci dice l'autore stesso nel prologo « de quarumdam solutionibus questionum a quibusdam philosophis Serenissimi domini mei Caesaris, et alijs per tempora mihi oppositarum, et plurium que subtilius quam in libro maiori de numero, quem composui, sunt solute, ac de multis quas ipse met inveni », dedicato al Cardinale Raniero Capocci, Card. diacono di S. M. in Cosmidin, e che egli chiamò *Flos* « quia illa nobis florida clericorum elegantia radiantibus dictavi, atque etiam quia ibi nonnulle sunt floride quamquam nodose apposite questiones, tanque geometrice quam arismetrice indagatione vigili, sic probabiliter enodate, ut ne dum non solum floreant in se ipsis, immo et quod per eas, velut ex radicibus plantule emergunt innumere questiones ».

Quanto al *Liber Quadratorum*, esso, come ho detto più sopra, ha tratto origine dal problema: « Trovare un quadrato tale che, aggiun-

(1) V. *Cronografia generale dell'Era Volgare dall'anno 1.° all'anno 2000*, *compilata da* G. Cesare Carraresi. — Firenze, Sansoni, 1874.

(2) Tralascio qui di esaminare i singoli problemi, riserbandomi di farlo quanto prima, insieme con la pubblicazione del libro stesso.

Digitized by Google

gendovi o togliendovi 5, rimanga sempre un quadrato ». Risolta questa questione, e messosi a considerare donde tale risoluzione procedeva, vide « ipsam (solutionem) habere originem ex multis accidentibus, que accidunt quadratis numeris, et inter quadratos numeros: quarum hinc sumens materiam, libellum incepi componere.... Quem libellum quadratorum intitulavi, in quo continebuntur rationes et probationes, geometrice solutiones questionis predictae, et multarum aliarum questionum solutiones ».

Ecco dunque in poche parole lo scopo e il contenuto del *Liber Quadratorum*, ed ecco brevemente passate in rassegna le opere di Leonardo, che lo hanno tramandato alla posterità. Due altri opuscoli sono attribuiti a lui (1), scritti in italiano ed aventi per titolo « Comento al X Libro degli elementi di Euclide » e « Libro di Mercatanti detto di minor guisa », opuscoli di cui si ha soltanto la citazione, ma che, per la coincidenza dei titoli, non sarei lontano dal credere che siano il primo, la traduzione della prima parte del *Flos* [... quia (X^{us} Euclidis) difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis, ideo ipsum X^{um} librum glosare incepi, reducens intellectum ipsius ad numerum, qui in eo per lineas et superficies demonstratur]; ed il secondo, la traduzione o un compendio dei capitoli 8 a 11 dell'Abbaco.

Dato così uno sguardo riassuntivo alle opere di Leonardo, ci sia permessa questa domanda: fu dai suoi contemporanei riconosciuto ed apprezzato il merito del grande Pisano? Se dovessimo por fede a quanto ci dice la maggioranza dei suoi biografi (2), dovremmo concludere di no; ma che anzi le sue ricerche furono disprezzate ed egli schernito, al punto da essergli imposto il soprannome *Bighellone*, donde *Bigollo* o *Bigollosie*, nome arrivato poi fino a noi unitamente a Leonardo.

È prima di tutto una asserzione puramente gratuita e molto discutibile che Bigollo corrisponda a Bighellone [vale a dire *ozioso* o *stupido* (*tölpel*, come ritiene anche il Cantor)], e credo molto migliore l'ipotesi del Bonaini che Bigollo sia una denominazione acquistatasi per la cognizione che dovette avere della lingua degli Arabi, per la dimora fatta in Bugia e per il conversare scientifico che egli ebbe con essi. Difatti, nel basso latino, si indicava colui che avesse famigliari due lingue colla voce *Biglosus* (3). Qualunque sia poi l'etimologia della parola *bigollo*, è certo che essa non suonava affatto ingiuria al nome di Leonardo, come luminosamente ha provato il Bonaini, pubblicando per il primo una memoria sincrona di Leonardo stesso, che mi

(1) G. Milanesi. *Documento inedito intorno a Leonardo Fibonacci*. Roma, 1867.
(2) Cfr. Montucla, Cossali, Libri, Guglielmini, Boncompagni, Cantor ed altri.
(3) Il Milanesi ritiene che *bigollo* venga da *bigolo*, trottola, appunto per il grande girare nelle diverse parti del mondo.

Digitized by Google

piace riportare per intero, come quella che è di capitale importanza per la biografia del Fibonacci. Ecco il documento (1):

« Considerantes nostre civitatis et civium honorem atque profectum, qui eis, tam per doctrinam quam per sedula obsequia discreti et sapientis viri Magistri Leonardi Bigolli, in abbacandis estimationibus et rationibus civitatis eiusque officialium et aliis quoties expedit, conferuntur; ut eidem Leonardo, merito dilectionis et gratie, atque scientie sue prerogativa, in recompensationem laboris sui quem sustinet in audiendis et consolidandis estimationibus et rationibus supradictis, a Comuni et camerariis publicis, de Comuni et pro Comuni, mercede sive salario suo, annis singulis, libre XX denariorum et amisceria consueta dari debeant (ipseque pisano Comuni et eius officialibus in abbacatione de cetero more solito serviat), presenti constitutione firmamus ».

Questa memoria si trova in quel Codice dell'Archivio di Stato di Firenze, che esibisce il « Constitutum Pisanum legis et usus », giusta la revisione ordinatane nel 1233. Si avverta però che essa non fa parte propriamente del testo primitivo, ma vi è aggiunta come una delle addizioni che nel 1241 vi vennero fatte, essendo Podestà del Comune Ugolino di Ugone Rossi di Parma. Da questa memoria risultano chiare, come osserva il Bonaini stesso, due cose: 1.° che la dottrina aritmetica appresa da Leonardo tra gli Arabi e da lui esposta nelle opere venne degnamente apprezzata dai reggitori del Comune di quel tempo, vedendosi che ne usarono per la più conveniente amministrazione del denaro pubblico; 2.° che la parola Bigollo unita al nome di Leonardo non può suonare dispregiativo, trovandosi in quello stesso solenne decreto che era inteso ad onorare questo insigne concittadino.

Cade quindi da sè qualunque ingiusta supposizione riguardo ai contemporanei e concittadini di Leonardo, e dalle magnifiche parole del decreto risulta evidente che Leonardo fu onoratissimo in vita tra i Pisani.

Questo particolare è l'ultimo che conosciamo della vita del grande Pisano: egli, verso il 1240, fu fatto, con decreto, contabile del Comune Pisano (ufficio che già prima esercitava senza però alcuna ricompensa) con un assegno annuo di 20 lire pisane e colazione, ed in tale ufficio, con ogni probabilità, morì, vecchio ed onorato, in Pisa.

3. I discendenti di Leonardo.

Non sappiamo se di Leonardo rimanessero figli, come pure ci è ignoto se ne avessero il fratello Bonaccingo, ed Alberto dalla sua

(1) F. Bonaini, *Memoria unica sincrona di Leonardo Fibonacci, nuovamente scoperta*. Giornale Storico degli Archivi Toscani, Anno I, Disp. IV.

Digitized by Google

donna Giolitta: rimane quindi incerto da chi traessero origine quei Fibonacci, di cui è memoria nei documenti di data posteriore. È nondimeno però ragionevole il supporre che gli individui di questa famiglia, che poi presero il nome di Bonagiis dell'Abbaco, o solamente anche dell'Abbaco, derivino tutti da Guglielmo, e per conseguenza appartengano al ramo da cui uscì il grande Leonardo. E siccome alcuni di questi vennero in rinomanza nell' insegnare la scienza dei numeri in patria e fuori, non credo privo d'importanza il darne qualche notizia in proposito (1). Il primo di questo nome di cui si ha traccia è Magister Nocchus de Abbaco, architetto, che fu anziano nel 1316 (2), e lasciò il figlio Bindo (1326): abbiamo quindi un Maestro Miniato, ed un altro Bonaccio che, da quanto risulta da una pergamena della Primaziale di Pisa, in data 27 gennaio 1367 (3), è il primo maestro di Aritmetica di cui si abbia ricordo. M. Miniato poi fu padre di quel M. Tommaso, che, nel 1363, insegnava pubblicamente in Pisa la matematica, e chiamato poi a Genova, nel 1372, dal Doge Domenico da Campofregoso e dagli anziani, con esenzione e franchigia da ogni imposta e gabella, egli vi si recò ad insegnare l'Aritmetica. Là si trattenne diversi anni, finchè, nel 1385, fu richiamato in Pisa con lo stipendio annuo di 70 fiorini d'oro, e vi rimase fino alla morte avvenuta verso il 1395.

A lui successe nell' insegnamento dell'Aritmetica il figlio Jacopo, che pure seppe tenere alto il nome della famiglia, come risulta da una deliberazione degli Anziani del 1399, con cui gli viene assegnato uno stipendio di 70 lire l'anno. L' altro figlio di Maestro Tommaso, Bartolomeo, si dette allo studio delle leggi, sostenendo diversi ed importanti uffici della repubblica.

Figlio di costui fu quel Piero, anziano pel Quartiere di Ponte nel marzo e aprile del 1381, di cui ancora, nel camposanto pisano, si vede il sepolcro, portante l' iscrizione:

Sepulcrum . Pieri . Quondam . Barthalomei
De . Bonagiis . Et . Eius . Heredum

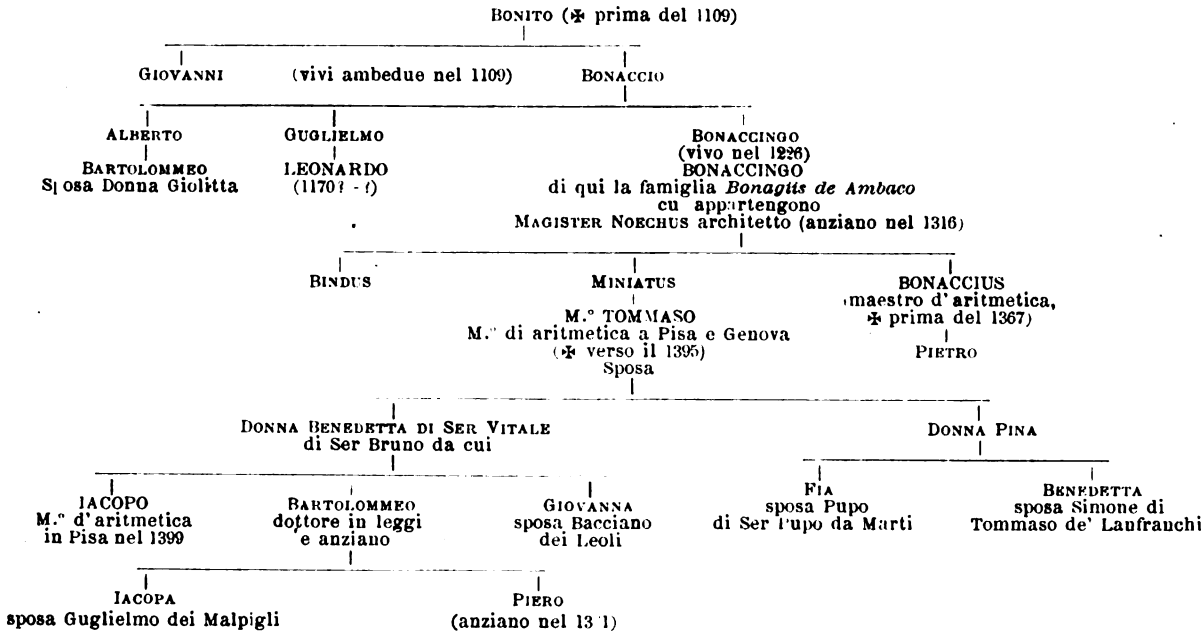
(1) Cfr. L. Tanfani: *Notizie della famiglia Pisana dei Fibonacci.* Giornale Araldico-Genealogico, Anno IV, N. 4 e 5.

(2) Intorno a M. Nocco, vedi: Tanfani, *Notizie inedite di S. Maria del Ponte-novo.* - Pisa. Nistri, 1871.

(3) « Ego Petrus filius olim Bonagii magistri de Ambaco, Pisanus civis, imperiali auctoritate iudex ordinarius atque notarius ».

Digitized by Google

TAVOLA GENEALOGICA DELLA FAMIGLIA BONACCI



NOTA. – Per la costruzione di questa tavola, oltre che della già citata memoria del Comm. Tanfani, mi sono servito dei risultati di ricerche che la squisita gentilezza del detto Comm. Tanfani e del Prof. Lupi dell'Archivio di Stato in Pisa, mi ha consentito di fare nell'Archivio stesso.

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

E. STUDY. — *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung der Kräfte und verwandte Gegenstände der Geometrie.* — Leipzig, Teubner, 1901-03; pp. XIII-603. [Prezzo Mk. 21]. — (*Contin. e fine;* v. Anno VI, p. 122).

Le questioni, che nella prima parte della « Geom. der Dynamen » sono trattate geometricamente, vengono riprese nella seconda ed esposte in modo analitico. Per ciò che riguarda i risultati nulla vi è da aggiungere a quanto si disse dianzi; bastera che ci fermiamo un istante sul metodo analitico impiegato dall' A.

Intanto egli non esige dal lettore conoscenze matematiche elevate; gli basta ch' egli possegga gli ordinarii principii della geometria analitica e proiettiva: quello che occorre in più si trova svolto nel libro. L' A. fa uso sistematico, nella sua esposizione, di certi invarianti di movimento (ossia di espressioni che non dipendono dalla posizione delle figure nello spazio), ciascuno dei quali viene indicato con un simbolo onde rendere più chiare e più semplici le formole. Collo stesso scopo si serve delle notazioni simboliche introdotte da Aronhold e largamente sviluppate da Clebsch, insieme colle relative operazioni di calcolo; nonchè di qualche altra che si usa nella teoria dei vettori. Fra le espressioni cui spetta una parte delle più importanti va notata una funzione, che lo Study chiama *alternante*, e che, scritta in coordinate plückeriane di rette, rappresenta, eguagliata a zero, le rette di un complesso lineare. L' alternante serve di anello d' unione fra le figure segmento, Keil, Quirl, e le altre motore ed impulsore; o, possiamo anche dire, fra queste ultime e una diname. Difatti ad ogni diname si può *associare* un certo alternante, e le dinami vengono composte quando si sommino gli alternanti corrispondenti; similmente anche ad un motore è possibile far corrispondere un alternante; e l'eguaglianza fra queste due espressioni definisce appunto, fra il motore e la diname, quella relazione per cui si dissero *associati* nello studio geometrico fatto nella prima parte. Lo stesso si dica quando in luogo di un motore si consideri un impulsore. Quanto poi al motore, il legame fra esso e il suo alternante associato può stabilirsi in due modi diversi, secondochè si pongano i coefficienti dell' alternante eguali a certe funzioni degli elementi caratteristici del motore o a certe altre. Nel primo caso la somma di due alternanti trae con sè la somma *geometrica* dei due motori associati, nel secondo caso invece la somma

Digitized by Google

stereometrica; in corrispondenza si ha la prima oppure la terza delle composizioni di dinami studiate nella parte precedente.

Val la pena di accenare ad un particolare dell' artificio con cui l'A. stabilisce il legame della seconda maniera fra alternanti e motori. Egli introduce quelle tali combinazioni, analoghe ai numeri complessi, che furono già definite da Clifford: $\xi + \varepsilon\eta$, dove ξ e η sono due numeri reali o complessi (nel senso ordinario della parola), e ε è una unità che verifica la condizione $\varepsilon^2 = 0$. Questi nuovi numeri, sui quali si opera colle stesse regole come sui numeri usuali, permettono di definire un nuovo sistema di coordinate della retta combinando fra loro, mediante l'unità ε, le coodinate di Plücker, alle quali possono anche ridursi in casi limiti. Quest' idea, non nuova del resto, apre l'adito allo svolgimento di tutta una nuova geometria della retta, come si vedrà nella terza parte del libro; per intanto l'A. se ne serve onde associare fra loro un motore ed un alternante. In tal modo si ha il vantaggio di far perdere a questa corrispondenza (che è poi quella che conduce alla composizione stereometrica delle dinami) il carattere di artificiosità ch' essa avrebbe, qualora si impiegassero le coordinate plückeriane.

* * *

La materia della terza parte appartiene oramai al campo della pura geometria; come già notai, solo verso il termine del libro si ritornerà per poco alla cinematica. In questa parte, che è la più lunga e la più interessante del libro, si presuppone in chi legge una coltura più vasta e approfondita che non nelle due precedenti; fra l'altro vengono adoperati sistematicamente il linguaggio ed i metodi della teoria dei gruppi di Lie. La questione, di cui qui si tratta, consisterebbe nel classificare, riducendole alle forme canoniche, le varietà lineari di dinami; ma il problema prende subito un aspetto geometrico, quando si pensi al noto legame fra la geometria delle dinami e la geometria dei complessi lineari di rette, per cui si può enunciare sotto la forma equivalente: classificare le varietà lineari di complessi (lineari e reali) di rette. Non è però l'ordinaria geometria detta retta (plückeriana) che qui entra in scena. Ho accennato poc' anzi alla definizione di un nuovo sistema di coordinate della retta mediante certi numeri $\xi + \varepsilon\eta$, che l'A. chiama *grandezze duali:* dicendo, com'egli fa, *raggio* la retta in quanto vien rappresentata dalle nuove coordinate, accanto all'ordinaria geometria della retta se ne presenta allora un' altra, la geometria del raggio. I principii di questa geometria sono la base e lo strumento delle ricerche intorno a cui si aggira l'opera dello Study in tutta la parte che rimane; egli deve quindi discorrerne alquanto prima di affrontare il problema enunciato.

Digitized by Google

Anzitutto conviene considerare il sistema dei raggi dello spazio come costituenti un doppio *strato*, per modo che in ogni raggio ne sian compresi due, uno del primo e uno del secondo strato: si distingueranno i due strati coll'indicare le coordinate (duali, s'intende) di un raggio qualunque con due diverse serie di lettere, secondochè il raggio lo si pensa come appartenente all'uno o all'altro strato. Una trasformazione lineare eseguita sulle coordinate di un raggio definisce una corrispondenza fra raggi, analoga ad una proiettività ordinaria: quella trasformazione sarà chiamata *collineazione duale* o *correlazione duale* secondo che muta ciascuno dei due strati in sè stesso oppure li scambia fra loro. Se poi nelle equazioni di trasformazione cambiamo il segno al coefficiente di s nelle coordinate dello spazio trasformato, si ha una corrispondenza del tipo di quelle che il prof. Segre studiò fra gli elementi complessi dello spazio definiti dalle coordinate ordinarie, e che chiamò *antiproiettività*: la stessa denominazione impiega lo Study per le nuove corrispondenze, chiamandole però *duali* per distinguerle dalle analoghe del prof. Segre. E mentre le antiproiettività nell'ordinario campo complesso comprendono da un lato le anticollineazioni e dall'altro le anticorrelazioni, similmente nella geometria del raggio avremo le *anticollineazioni* e le *anticorrelazioni duali*, di cui le prime mutano un raggio in un altro del medesimo strato e le seconde lo mutano in un raggio dell'altro strato. Si avrà un'idea della differenza che passa fra le corrispondenze duali e le altre, quando si pensi che la condizione di appartenenza fra elementi in queste ultime ha per analogo nelle prime la condizione di ortogonalità fra raggi.

Un carattere che differenzia le collineazioni dalle anticollineazioni duali è questo: i movimenti occupano nel gruppo delle collineazioni la stessa posizione che le simmetrie nel gruppo delle anticollineazioni. A loro volta tutte le proiettività e antiproiettività duali entrano come sottogruppo invariante in un altro gruppo (a 17 parametri), che si compone delle trasformazioni precedenti e della similitudine; queste trasformazioni più generali sono chiamate *proiettività radiali*, e citerò fra le loro proprietà più salienti la seguente: le proiettività radiali comprendono tutte le trasformazioni di raggi, che mutano il sistema delle perpendicolari ad un raggio proprio in un altro sistema della stessa natura. Mi limiterò a far cenno di un *birapporto duale*, mediante il quale si distinguono le proiettività duali entro il sistema delle proiettività radiali; nonchè dell'esistenza di costruzioni geometriche delle proiettività duali, consistenti nella costruzione ripetuta della perpendicolare comune ad una coppia di raggi (operazione corrispondente alla proiezione e alla sezione nell'ordinaria geometria proiettiva).

Digitized by Google

A questo punto si presenta la questione degli elementi improprii. I vantaggi di varia natura, che l'introduzione di questi elementi porta con sè, si possono riassumere in una parola dicendo che essi valgono a rendere *chiusi* gli insieme di punti (elementi) costituiti inizialmente di punti al finito. Nell'ordinaria geometria analitico-proiettiva si definiscono i punti all'infinito introducendo le coordinate omogenee, ed eseguendo poi su queste dei passaggi al limite. Ciò si fa in particolare nella geometria plückeriana della retta. Se, ora, si tenta alcunchè di simile nella geometria del raggio che lo Study ci va esponendo, si vede che la cosa non riesce più: nel passare al limite sulle coordinate duali del raggio (che sono, del resto, omogenee), esigendo che la corrispondenza fra il raggio e le sue coordinate sia continua, si trova che un raggio proprio dà luogo non già ad un raggio improprio ben determinato, ma a tutto un fascio di tali raggi. Per questa ragione lo Study chiama *continuo irregolare di raggi* il continuo di raggi rappresentato dalle nuove coordinate. Tuttavia vi è il mezzo di svolgere la geometria del raggio in modo da evitare l'inconveniente indicato. Non è qui il caso di indicare in dettaglio in che modo si riesca a raggiungere lo scopo; solo dirò che vi si arriva in duplice modo, corrispondentemente alle due soluzioni d'un certo problema della teoria dei gruppi, col quale la questione proposta si può mettere in relazione. Si ottengono così due continui *regolari*, ciascuno dei quali vien *chiuso* da un elemento improprio: il *Punktstrahl* nel primo caso, ed il *Grenzstrahl* nel secondo.

Per comprendere in che cosa consistano questi due elementi improprii, ricordiamo che le relazioni di appartenenza dell'ordinaria geometria vengono sostituite, in quella dello Study, da relazioni di ortogonalità fra raggi. In conseguenza ecco come possiamo concepire il raggio: si pensi il sistema di tutte le rette perpendicolari ad una retta (propria) r; la r individua quel sistema, e viceversa ne rimane individuata. Orbene, il *raggio* non è altro che una retta r definita nel modo indicato mediante le sue perpendicolari. Si capisce che questa concezione geometrica del raggio ha la sua ragione d'essere nella natura delle coordinate impiegate a rappresentarlo. Queste coordinate vengono dallo Study sostituite da altre, combinazioni delle primitive, in due modi diversi (senza però nulla mutare all'essenza geometrica del raggio), dando così luogo ai due continui regolari cui accennai. Nel primo si ottiene, come figura limite del sistema delle perpendicolari ad un raggio, il sistema dei raggi di una stella impropria: ora questa stella definisce anch'essa un certo elemento, dal quale inversamente è definita: il suo centro, quello che in geometria proiettiva si dice un punto all'infinito, e che lo Study chiama Punkstrahl. Ma fra il punto all'infinito ed il Punkstrahl passa questa sostanzial[o] differenza

Digitized by Google

che il primo va concepito come un punto, il secondo come un raggio. Nel secondo continuo regolare di raggi si arriva alla figura limite del sistema delle perpendicolari ad una retta propria imaginando dapprima queste perpendicolari distribuite in infiniti fasci improprii, e poi supponendo che i piani di tutti questi fasci divengano paralleli fra loro. La figura che così risulta (gestreifte Parallelenbündel) forma, coll'insieme dei raggi propri, un continuo chiuso rappresentabile con un unico sistema di coordinate; lo Study perciò la chiama ancora « raggio », e precisamente *raggio limite* (Grenzstrahl).

Per quanto l'A. intenda di riferirsi, in massima, a enti reali, non è tuttavia possibile tralasciare di considerare brevemente il raggio come definito da coordinate (duali) formate con numeri complessi qualunque. Se difatti nel campo reale non si può dire che vi sia, essenzialmente ed in linea generale, fra la retta ed il raggio una vera differenza, invece nel campo imaginario s'incontrano fra i due concetti delle divergenze che non è lecito trascurare. Così esistono dei raggi proprii imaginari che non si possono in alcun modo concepire come rette; come pure vi sono dei raggi le cui coordinate (duali) si possono bensì assumere a coordinate plückeriane di rette, ma non però di *una retta* determinata. E queste divergenze si fanno sempre più sentite nello studio delle congruenze e dei complessi lineari che l'A. svolge, dove si vede che lo scambio delle parole « retta » e « raggio » è in generale inammissibile. Rileverò come esempio questo fatto, che nella geometria del raggio, contrariamente a quanto succede nella geometria plückeriana della retta, vi hanno infinite famiglie di congruenze algebriche irriducibili, composte esclusivamente di raggi proprii.

Dopo questi preliminari si può affrontare il problema della classificazione dei sistemi lineari di complessi (lineari). E qui il compito del relatore si fa particolarmente difficile. Difatti la natura stessa della materia trattata nei paragrafi seguenti è tale che manca quella linea ampia e marcata, bastevole da sola a dare un'idea generica del loro contenuto; è dunque necessario, nel riferire, o entrare in particolari minuziosi, cosa che il carattere di questo articolo non comporta, o riuscire manchevoli e superficiali. È appunto in vista di dovermi appigliare a quest'ultimo partito, ch'io preferii fermarmi alquanto su ciò che costituisce l'introduzione e il fondamento della teoria.

La classificazione, di cui parlai, si fa in base alle proprietà dei sistemi lineari di complessi che rimangono inalterate per le trasformazioni di un certo gruppo a 18 parametri (caratterizzato dal fatto che le sue trasformazioni mutano un fascio di complessi coassiali in un fascio della stessa natura) e di due suoi sottogruppi a 17 e a 16 parametri; a ciascuna classe si ascrivono sistemi di complessi, cui spet-

Digitized by Google

tano due certi numeri interi, indicanti il primo quanti complessi impropri linearmente indipendenti contenga ciascun sistema della classe, ed il secondo la dimensione della varietà di fasci di complessi propri coassiali contenuti nel sistema. Ogni complesso possiede un *asse principale,* che non è però la stessa cosa dell'asse principale di un ordinario complesso di rette; e accanto alle configurazioni, cui danno luogo i sistemi di complessi delle varie classi, si hanno altrettante configurazioni formate cogli assi principali dei relativi complessi. Queste figure, completate con altre che delle prime sono o casi limiti o parti costitutive, si indicano col nome di *catene;* esse hanno un'importanza grandissima nel primo continuo regolare di raggi, e si ottengono scrivendo delle equazioni d'un certo tipo fra le coordinate di raggio. La dimensione d'una catena può andare da zero a quattro; si va cioè dal raggio isolato fino al sistema di tutti i raggi: le proprietà di alcune catene ricordano quegli enti, designati dal prof. Segre col medesimo nome, che s'incontrano nella teoria delle antinvoluzioni. L'A. fa uno studio minuto delle catene e delle forme in esse contenute, e questo studio ha per effetto di segnare sempre più la differenza fra l'ordinaria geometria della retta e quella del raggio; così se confrontiamo quello che lo Study chiama « complesso planare di raggi » col complesso lineare speciale dell'ordinaria geometria, che è il suo analogo, troviamo che mentre quest'ultimo è rappresentabile univocamente sopra un cono di 2.° grado in un S_4, invece il primo vien rappresentato sopra un cono di 3.° ordine in un S_3 (lineare).

La questione della rappresentazione di una varietà su un'altra, così feconda di risultati, doveva inevitabilmente attrarre l'A., che difatti dedica a questo argomento alcuni paragrafi. Viene in primo luogo la rappresentazione del sistema di tutti i raggi (composti nel primo continuo naturale) su uno spazio punteggiato a quattro dimensioni: la varietà rappresentativa M_4 è immersa in un R_8 lineare, è del 6.° ordine e della 3.ª classe; in tal modo si possono studiare le intersezioni (complete o parziali) di complessi quadratici, fra cui sono già da annoverarsi le catene a una o due dimensioni. Nuovi risultati si avrebbero assumendo come elemento spaziale (punto) una qualunque delle figure già studiate; l'A. si limita a due di esse, che danno luogo a risultati particolarmente notevoli: la *aplanare Kettencongruenz* (il tipo più generale di catena a due dimensioni) e il fascio di parallele (che è una catena particolare a una dimensione). Le aplanare Kettencongruenzen si rappresentano biunivocamente mediante i punti propri di un R_8, per modo che dal gruppo delle trasformazioni radiali (a 17 parametri) nasce un gruppo di trasformazioni affini; ai raggi del primo spazio corrispondono nell'R_8 due sorta di figure, che sono spazi lineari a sei dimensioni, e rappresentano risp. i raggi del primo e

Digitized by Google

del secondo strato. Questo studio c'insegna, fra l'altro, che tra la geometria euclidea e la geometria degli enti duali passa una relazione analoga a quella che intercede fra la geometria proiettiva in una forma di prima specie e la geometria proiettiva in una forma di seconda specie. I fasci di parallele a loro volta vengono rappresentati coi punti di un cono a quattro dimensioni del 6.° ordine contenuto in un R_8. La rappresentazione è sempre biunivoca, eccetto che per il vertice del cono; ma è possibile fare sparire l'eccezione definendo un certo fascio *improprio* o *singolare* di raggi, al quale si dà per corrispondente il vertice del cono; e l'introduzione di questo fascio singolare si può fare in duplice modo, precisamente come si è visto potersi chiudere in due modi diversi il continuo dei raggi proprii.

Accennerò solo di passaggio alla rappresentazione delle collineazioni radiali mediante le coordinate di fasci di parallele oppure di aplanare Kettencongruenzen, che conducono a importanti esempi di generazioni radiali-proiettive di varii luoghi di raggi; così pure non dirò che poche parole dello studio relativo alle proprietà *metriche* degli enti studiati fin qui. L'A. procede anzitutto ad una nuova classificazione dei sistemi lineari di complessi, prendendo a base non più i gruppi delle trasformazioni radiali-proiettive o duali-proiettive, ma bensì il gruppo dei movimenti euclidei: ascriverà cioè ad una medesima classe due figure quando sono sovrapponibili. Le forme da lui considerate sono esclusivamente reali. Fra tutte emergono per importanza le stelle (generali) di complessi, o, interpretando le coordinate di un complesso come coordinate di raggio, le *aplanare Kettencongruenzen*, di cui si hanno tre tipi, che si potrebbero chiamare: congruenze a tre assi, di rotazione e sferiche. Le più notevoli sono quelle del primo tipo, le cui rette reali si possono (in un unico modo) distribuire sopra ∞^1 iperboloidi; esse sono del 3.° ordine e della 2.ª classe. Nel loro studio metrico incontriamo ancora, come nelle congruenze ordinarie, i punti limiti ed i fuochi, le superficie limiti e le superficie focali (queste ultime interessanti per ciò che riguarda la loro forma), le superficie principali e le sviluppabili; a questo studio si presta sia un sistema di coordinate ellittiche, sia un altro sistema di coordinate, legato al precedente mediante le funzioni ellittiche. Anche le congruenze del secondo tipo (di rotazione) posseggono notevoli proprietà, fra le quali sono da ricordare le relazioni che tali congruenze hanno col paraboloide, e le generazioni eleganti e semplici a cui si prestano.

Siamo giunti oramai all'ultimo paragrafo, e l'A., ritornando all'argomento da cui aveva preso le mosse e che ispirò il titolo del libro, applica alla teoria dei movimenti infinitesimi di un corpo rigido lo studio dei sistemi lineari di complessi fatta in base alla loro classificazione metrica. Questi movimenti vengono dapprima distinti secondo

Digitized by Google

il grado di libertà (da 1 a 6), e si assegnano poi ad una medesima classe tutti quelli che sono *congruenti* fra di loro. Per rappresentare in modo intuitivo i movimenti l'A. introduce dei meccanismi « semplici », mediante i quali, opportunamente combinati fra loro, si attuano tutti i movimenti classificati. Come meccanismi semplici considera anzitutto la *vite* (*un* grado di libertà) e come casi limiti la *cerniera* (*Kni gelenk*) e un tubo di scorrimento prismatico (*Prismenführung*); poi il *Laufstange* (appoggiatoio), che permette una rotazione intorno ad un asse ed una traslazione qualunque lungo l'asse medesimo (*due* gradi di libertà); infine la cerniera sferica (*Kugelgelenk*) colla quale si attuano tutte le rotazioni possibili intorno ad un punto (*tre* gradi di libertà). La classificazione dei movimenti, che si fonda sui principii della teoria delle trasformazioni infinitesime, conduce da sè alla rappresentazione mediante quei meccanismi, e dà luogo a importanti teoremi, molti dei quali già noti, e dovuti sia al Mobius, sia al Konigs, al Mannheim, al Ball.

* * *

Che i metodi dello Study abbiano un'impronta di viva originalità è cosa che non si può mettere in dubbio; ma dove questa qualità emerge sopratutto è nelle ultime pagine del libro, che contengono, in un'appendice, i fondamenti di un nuovo metodo di Cinematica dei sistemi rigidi, e comprendono nello stesso tempo, in un disegno a grandi linee, tutta la materia svolta fin qui.

Imaginiamo il sistema rigido rappresentato da una terna cartesiana ortogonale di raggi: questa figura può assumere nello spazio ∞^6 posizioni. Ciascuna di queste posizioni, che chiameremo un *soma*, si può pensare proveniente, con un movimento, da una certa posizione fissa, che si chiama *protosoma*. Al soma è applicabile una rappresentazione analitica, che fu già impiegata precedentemente nello studio dei movimenti, e che consiste nel definirlo mediante otto coordinate, composte in grandezze duali. In tal modo il soma compare come una estensione del concetto di « raggio proprio reale », e la teoria che ora si va svolgendo, la geometria del soma, non è altro che una nuova geometria della retta, che comprende in sè tanto la geometria proiettiva dello spazio quanto la geometria radiale-proiettiva. Così si tratterà delle trasformazioni *proiettive* di somi, dei loro sistemi lineari e delle loro *catene*, della classificazione e costruzione di queste; si introdurrà nel continuo dei somi l'ente improprio (il *parasoma*), mediante il quale quel continuo vien chiuso; e si apprenderà, fra l'altro, che la geometria somatico-proiettiva in una catena a una opp. a due dimensioni si identifica colla geometria radiale-proiettiva nel sistema delle perpendicolari ad un raggio proprio opp. nel continuo di tutti i raggi pro-

Digitized by Google

prii; e che la stessa geometria somatico-proiettiva si riduce, quando si considerino soltanto dei parasomi, alla geometria plückeriana della retta.

La teoria, di cui lo Study ci presenta in queste pagine come l'introduzione, ha una portata tutt'altro che indifferente: le sue relazioni colla teoria dei gruppi, colla geometria non euclidea e colla teoria dei quaternioni le conferiscono un grado tale di generalità da permetterle ben più ampii ulteriori sviluppi. Dovrebb'essere, anzi, come il punto di partenza per tutta una teoria geometrico-analitica, il cui strumento analitico sarebbe un sistema di grandezze complesse a otto unità, nella quale sia compresa quella dei quaternioni, e dove spetti alla geometria delle dinami una posizione analoga a quella che spetta, nella teoria dei quaternioni, alla composizione dei vettori.

Non discutiamone la praticità di fronte alle applicazioni meccaniche: una tale discussione sarebbe, oggi, per lo meno oziosa. A noi basta constatare la solidità del fondo filosofico su cui poggiano le ricerche dello Study; tocca ai geometri, a cui la lettura della « Geom. der Dynamen » è vivamente raccomandabile, di svilupparne i concetti e completarli là dove dall'A. non furono che adombrati. Chè se da questa più larga investigazione balzasse spontanea l'applicazione pratica alle dottrine meccaniche, quell'applicazione che l'A. giustamente apprezza, si raddoppierebbe il plauso con cui va accolta l'opera sua.

Pavia, Giugno 1903.

E. DANIELE.

J. ENRIQUES E U. AMALDI. — *Elementi di geometria ad uso delle Scuole secondarie superiori.* — Bologna, N. Zanichelli 1903, 8.° pag. XXII-655 [Prezzo L. 4, 50].

La parte relativamente grande che nella produzione matematica italiana di questi ultimi anni è occupata delle ricerche sulle questioni fondamentali di principî e di metodi, ha cominciato già da qualche tempo a esercitare una notevole influenza sulla forma e sul contenuto dei testi destinati all'insegnamento delle parti elementari dell'algebra e della geometria.

L'indole delle modificazioni che questi ebbero a tutta prima a subire per conseguenza delle nuove preoccupazioni teoriche sembrava più atta a confermare che non a dissipare il preconcetto naturale che portava la maggior parte degli insegnanti di matematica nelle Scuole secondarie a riguardarle collo stesso occhio col quale i loro colleghi insegnanti di lettere latine e greche riguardavano le trasformazioni alle quali erano assoggettate le loro grammatiche per effetto dei progressi delle scienze filologiche.

Digitized by Google

Non si doveva tuttavia tardar molto a riconoscere che la tendenza a dare un eccessivo sviluppo a delle considerazioni preliminari troppo astratte per la mente dei giovani, a scapito del tempo che poteva essere dedicato alle parti della materia più atte a essere da essi assimilate e a stimolare le loro facoltà intellettuali, e inoltre più immediatamente connesse ai loro studi ulteriori e alle applicazioni pratiche, non era affatto una conseguenza legittima dei nuovi indirizzi di ricerca. Ben al contrario questi pel fatto stesso di presentare nuove alternative nella scelta delle proposizioni fondamentali e di emancipare tale scelta dalle esigenze relative al grado maggiore o minore di evidenza intuitiva, non potevano a meno che condurre a un più largo concetto della possibilità di semplificare i procedimenti dimostrativi, il cui « rigore » veniva ora fatto consistere, non in ciò che le dimostrazioni si appoggiassero a certi presupposti piuttosto che a certi altri, ma invece solo in ciò che, di nessuna proposizione, si facesse in esse, espressamente o tacitamente, uso senza che questa figurasse tra quelle antecedemente dimostrate o esplicitamente assunte come postulati.

Questo obbligo lungi dal corrispondere a uno scoraggiamento o eliminazione dell' intuizione geometrica, portava invece a disciplinarla e ad educarla, premunendo contro gli errori ai quali può dar luogo la fiducia inconsiderata e instintiva in essa, quando specialmente si tratti di figure per le quali è necessario distinguere e discutere le diverse possibili posizioni rispettive dei loro elementi o giudicare della compatibilità o incompatibilità delle supposizioni simultanee che occorra di fare in proposito.

Tanto per tale riguardo come per gli altri ai quali avremo occasione di accennare in seguito, si presenta come degna d' attenzione la pubblicazione di questi « Elementi di Geometria » i cui autori sembrano appunto essersi particolarmente curati di ben delineare i rispettivi uffici dell' osservazione intuitiva e sperimentale da una parte e del ragionamento formalmente rigoroso dall' altra, in modo da addestrare l' allievo a discernere, fin dal principio, l' esercizio dell' una facoltà dall' esercizio dell' altra e di porlo in grado di farsi subito un chiaro concetto delle esigenze e delle condizioni alle quali, per ciascuna di esse rispettivamente, tale esercizio deve uniformarsi.

Passeremo qui brevemente in rassegna i singoli punti nei quali il metodo d' esposizione da essi seguito si discosta in modo più caratteristico da quello comunemente adottato.

1) *Definizione dell' eguaglianza delle figure.* — Come concetti primitivi, ottenuti dall'osservazione, sono assunti dagli autori quello di « *eguaglianza fra segmenti* » e quello di « *eguaglianza tra angoli* », caratterizzando le due relazioni così indicate mediante l'enunciazione delle note proprietà fondamentali dell' eguaglianza le quali

Digitized by Google

vengono così, *pel solo caso dei segmenti e degli angoli*, ad essere assunte come postulati.

Che cosa si deve intendere per « uguaglianza », nel caso di altre figure che non siano angoli o segmenti, viene poi indicato, in ciascun caso, da una speciale definizione, riferentesi all' uguaglianza di angoli e segmenti che nella figura stessa compaiono, o si possono costruire. Così, per esempio, « *circoli uguali* » sono definiti come « circoli aventi raggi uguali », « *triangoli uguali* » come « triangoli aventi lati e angoli ordinatamente uguali », « *diedri uguali* » come « diedri aventi angoli rettilinei uguali » ecc. Queste definizioni, da ciascuna delle quali risulta immediatamente che le singole « uguaglianze » che esse definiscono, godono della proprietà caratteristica che due figure uguali a una terza sono uguali tra loro (proprietà che come vedemmo è assunta come postulato solo per l' eguaglianza tra segmenti, o tra angoli) sono precedute o accompagnate da considerazioni, d' indole intuitiva o sperimentale, relative alla sovrapponibilità delle figure uguali, considerazioni che ponendo in luce la costante presenza di *tale* circostanza in tutti i singoli casi di « *eguaglianza* » successivamente definiti servono in certo modo a dare un ulteriore « giustificazione » dell' impiego d' una stessa parola per designarli tutti.

Tanto pei segmenti come per gli angoli, viene inoltre assunto il postulato che, in ogni retta o fascio, vi sono rispettivamente due punti, o rette, che determinano con un dato punto, o retta, rispettivamente, un segmento, o un angolo, eguale a un segmento, o a un angolo, dato qualunque.

2) *Teoria dell' equivalenza.* — La relazione di equivalenza è definita anzitutto *solo per i poligoni*, come scomponibilità, *mediante segmenti*, in parti rispettivamente uguali. Dopo aver dimostrato, in base a tale definizione, che due poligoni equivalenti a un terzo sono equivalenti tra loro, se ne deduce la proposizione che parallelogrammi di base e altezza uguali sono equivalenti.

Per ottenere la proposizione inversa di questa (cioè che parallelogrammi equivalenti, aventi eguali basi, hanno anche uguali altezze), nonchè l' inversa del teorema di Pitagora, si assume come postulato che « una parte (poligonale) d' un poligono non può essere equivalente all' intero poligono ».

Da questo postulato e dai teoremi relativi alla trasformazione di poligoni in rettangoli di data base, vien dedotta la proposizione che, se due poligoni sono tali che nessuno di essi sia equivalente a una parte dell' altro, essi sono equivalenti tra loro, dalla quale deriva immediatamente l' altra che i poligoni che si ottengono togliendo rispettivamente da due poligoni equivalenti, due altri poligoni equivalenti, sono pure equivalenti.

Digitized by Google

L'importanza di questo secondo criterio per giudicare dell'equivalenza (tra figure a contorno rettilineo) è messo in rilievo facendo vedere come la sua applicazione permetta di semplificare notevolmente la dimostrazione di teoremi (quali in particolare quello relativo alla sezione aurea) già prima ottenuti indipendentemente da esso e dal postulato dal quale esso deriva.

Si osserva infine che, se anche si definissero come poligoni equivalenti quelli che sono scomponibili in parti uguali mediante segmenti *o archi di circonferenze*, basterebbe ammettere che, per poligoni equivalenti in questo secondo senso, sussista pure il postulato sopra enunciato (che cioè una parte d'una figura non può essere equivalente alla figura intera) per poter conchiudere che due poligoni, equivalenti in tale senso, lo sono anche nel senso prima definito, cioè che essi sono scomponibili, *anche solo mediante segmenti*, in parti rispettivamente uguali. Il che deriva immediatamente dal fatto che i due poligoni in questione non potendo, in virtù del suddetto postulato, essere scomposti, mediante segmenti o archi di circolo, in modo che una parte dell'uno risulti composta di parti rispettivamente uguali a quelle nelle quali tutto l'altro si sia scomposto, non potranno, *a fortiori*, venire scomposti in tal modo coll'impiego di soli segmenti rettilinei.

Esaurito così il soggetto dell'equivalenza tra figure piane a contorno rettilineo, si passa a definire in modo analogo (come scomponibilità in parti rispettivamente uguali) l'equivalenza tra quelle a contorno curvilineo. Per esse pure si assume il postulato che una parte d'una figura non può essere equivalente alla figura intera, osservando tuttavia come qui (a differenza di quanto avviene per i poligoni) non si riesca a dimostrare, in generale, la proposizione inversa cioè « che se di due figure nessuna è equivalente a una parte di un'altra esse sono equivalenti fra loro ».

Dal che nasce la necessità di introdurre una nuova designazione per indicare il fatto che due figure, pur non essendo equivalenti in nessuno dei sensi sopra definiti, siano tuttavia tali che ciascuna di esse possa dimostrarsi non essere equivalente ad alcuna parte dell'altra.

In tale caso le due figure sono dette « *avere superficie uguali* » la quale frase s'intende, naturalmente, così definita nel suo insieme e come un tutto inscindibile (come avviene in quelle definizioni che dai logici matematici sono designate come « *definizioni per astrazione* » tra le quali appunto la presente si può classificare).

Il distinguere così dall'equivalenza propriamente detta (o scomponibilità in parti rispettivamente uguali) quest'altra relazione tra due figure, la quale nella trattazione ordinaria si trova considerata pro-

Digitized by Google

miscuamente colla prima, ha il vantaggio di mettere chiaramente in luce la diversità dei procedimenti dai quali occorre servirsi per dimostrare rispettivamente il sussistere dell'una o dell'altra di esse tra due date figure: in quanto, per dimostrare che due figure hanno superficie uguali, nel senso sopra definito, non è necessario farle comparire come somme o differenze di figure rispettivamente uguali, ma basta solo trovare un tal modo di scomporre in parti l'una e l'altra dal quale risulti che una parte dell'una sia equivalente a una parte dell'altra e che la differenza delle parti rispettivamente rimanenti (o ciascuna di esse) sia minore (cioè equivalente a una parte) di qualsiasi figura data per quanto piccola (*metodo d'esaustione*).

Si dimostra così che figure aventi superficie uguali a quella di una terza hanno superficie uguali tra loro, e che figure che siano somme o differenze di altre aventi rispettivamente uguali superficie hanno pure superficie uguali tra loro.

Un procedimento del tutto analogo è pure seguito per ciò che riguarda i volumi dei solidi. Si definisce anzitutto l'equivalenza tra poliedri, come scomponibilità in parti uguali, mediante piani, deducendone immediatamente che poliedri equivalenti a un terzo sono equivalenti tra loro.

Dopo aver dimostrato, in base a questa definizione, l'equivalenza dei prismi aventi basi equivalenti e d'altezze uguali, viene assunto (onde poter dimostrare il teorema inverso) il postulato che un poliedro non può essere equivalente a una sua parte.

Da questo, col sussidio dei teoremi relativi alla trasformazione dei prismi in parallelepipedi rettangoli di data base, si deduce il teorema che, se due prismi sono tali che ciascuno di essi non sia equivalente ad alcuna parte dell'altro, essi sono equivalenti tra loro, dal quale consegue che le differenze di prismi equivalenti sono pure equivalenti.

Si avverte che il suddetto teorema, analogo a quello prima ottenuto per i poligoni, sussiste qui solo per i prismi e non per i poliedri in generale, del che la ragione sta in ciò che mentre i poligoni possono essere trasformati in rettangoli di data base e cioè in figure tali che non possono essere non equivalenti tra loro senza essere, *ipso facto*, l'una equivalente a una parte dell'altra, per i poliedri invece non sussiste tale possibilità.

Ne deriva che, per i prismi soltanto e non per i poliedri in generale, vale qui la proposizione (analoga a quella già dedotta per i poligoni) che, cioè, se due di essi sono tali da poter essere scomposti comunque (cioè coll'impiego, oltrecchè di piani, anche di superficie cilindriche, coniche, sferiche) in parti rispettivamente uguali, essi sono pure tali da essere scomponibili in parti rispettivamente uguali anche

Digitized by Google

solo mediante piani; purchè s'intende si ammetta che, anche per la scomposizione mediante superficie qualunque (piane o non piane), sussista il postulato già più volte accennato, che una figura e una sua parte non possono essere scomposte in parti rispettivamente uguali.

I poliedri, che non siano prismi, si trovano quindi per questo riguardo in una condizione analoga a quella in cui si trovano, in geometria piana, le figure a contorno non rettilineo, per le quali il fatto che esse siano scomponibili, *mediante rette o cerchi*, in parti rispettivamente uguali non permette di conchiudere che esse lo siano mediante rette soltanto.

E poichè per i poliedri, nonchè per i solidi limitati da superficie non piane, non si può escludere la possibilità che due di essi, pure non essendo equivalenti, siano tuttavia tali che nessuno di essi sia equivalente a una parte dell'altro, si presenta anche qui naturale l'introduzione di una designazione diversa per indicare il sussistere di quest'ultimo fatto tra figure che non siano equivalenti nel senso già dato a questa parola.

La locuzione adoperata dai nostri A. consiste nel dire che in quest'ultimo caso le due figure « *hanno uguali solidi* » o, come si potrebbe anche dire, evitando di scostarsi troppo dall'uso ordinario; « *hanno eguali volumi* ».

La forma di tale definizione (per la quale è da ripetere ciò che già si disse per l'analoga della geometria piana) trova sufficiente giustificazione nel fatto che, quando la relazione così definita sussiste tra due figure e una terza, può essere dimostrata sussistere anche fra le prime due.

E parimente si dimostra che figure che siano somma o differenza di altre aventi rispettivamente eguali volumi, hanno pure eguali volumi.

Della proposione che due tetraedri di basi equivalenti e altezze uguali hanno eguali volumi è riprodotta, oltre l'ordinaria dimostrazione, cogli scaloidi, anche l'altra così elegante data da Euclide e male a proposito ommessa nella maggior parte dei trattati scolastici mentre (e lo stesso, come mi risulta da personale esperienza, si può dire anche delle dimostrazioni relative ai volumi del cono e della sfera, date nelle opere d'Archimede) è tanto atta a interessare e essere gustata dagli allievi.

Il caratteristico ricorso alla riduzione all'assurdo tanto nella suddetta come nelle altre dimostrazioni relative alle « eguaglianze di volumi » è, dal nostri A. opportunamente messo in rilievo, come anche il fatto che in ciascuna di esse si fà uso della proposizione che, dato un solido qualunque, si può sempre costrurre un poliedro (in particolare, un prisma) che sia minore di esso, cioè tutto contenuto in esso.

Digitized by Google

3) *Teoria delle proporzioni* — Gli A. cominciano col far notare come le varie specie di relazioni ed operazioni da essi successivamente definite come « uguaglianze », « disuguaglianze » « somma », « differenze », pure assumendo un significato geometrico particolare in ciascuno dei casi separatamente considerati (segmenti, angoli, archi di circonferenza, superficie, volumi), hanno tuttavia un gruppo di proprietà comuni che consigliano l'introduzione di una unica designazione (« *grandezze* ») per indicare ogni specie di enti geometrici per i quali esse sussistano.

Passano quindi a stabilire in modo generale il concetto di « proporzione » adottando la definizione che ne è data nel 5.° libro d'Euclide.

Questa viene però accompagnata da considerazioni dirette a far vedere come la proprietà in essa contemplata, nel mentre può essere dimostrata sussistere fra quattro grandezze di cui la seconda e la quarta siano rispettivamente equimultiple di equisummutiple della prima e della terza, è inoltre suscettibile di sussistere anche tra grandezze tra le quali non si possa stabilire alcuna relazione di tal genere.

A tale proposito non credo sarebbe stato inopportuno, (aderendo anche qui al procedimento delle definizioni limitate, adottato nella trattazione dell'eguaglianza e dell'equivalenza) definire in principio la proporzionalità tra grandezze commensurabili, come s'è detto sopra e introdurre solo in seguito la definizione euclidea più generale, premettendo ad essa la dimostrazione dell'esistenza di segmenti incommensurabili, dalla quale risulta la sua opportunità e necessità.

Il lieve inconveniente, più apparente del resto che reale, che si presenterebbe seguendo questa via, pel fatto di dover dimostrare due volte (cioè per ciascuna delle due definizioni di proporzionalità successivamente introdotte) il teorema di Talete, l'altro sulla proporzionalità tra le superficie e le basi in triangoli di eguale altezza, nonchè le due o tre proposizioni relative a cio che si potrebbe chiamare la transitività e l'univocità della relazione tra coppie di grandezze che si considera, troverebbe esuberante compenso nella maggior chiarezza e accessibilità che acquisterebbe l'esposizione senza la minima perdita di rigore e di generalità.

Gli A. passano in seguito a dimostrare, limitatamente alle proporzioni tra segmenti, l'esistenza della quarta proporzionale e la scomponibilità d'un segmento in parti proporzionali a due segmenti dati, accennando solo alla possibilità di una dimostrazione applicabile al caso di qualunque specie di grandezze.

Dimostrano invece, per le grandezze in generale, come non vi possa essere che una sola grandezza quarta proporzionale dopo tre date, e

Digitized by Google

che la scomposizione d'una grandezza in parti proporzionali a due date grandezze non può effettuarsi che in un modo solo.

I quali due ultimi risultati, per ciò che riguarda i segmenti, vengono poi applicati a dedurre le proposizione inverse del teorema di Talete e degli altri che ne dipendono, nonchè l'unicità della media proporzionale tra due segmenti.

Vengono in seguito due capitoli dedicati a porre in relazione la teoria delle proporzioni fra segmenti colla teoria dell'equivalenza deducendo da quella direttamente i teoremi relativi alla « composizione » e « divisione » dei termini d'una proporzione, nonchè quello della permutabilità dei termini medi o estremi e gli altri che conducono al concetto di « ragione composta ».

Gli stessi teoremi vengono estesi al caso delle proporzioni tra poligoni, o tra poligoni e segmenti, ricorrendo alla trasformazione dei poligoni in rettangoli aventi una dimensione comune.

La trattazione è chiusa dalla dimostrazione generale di questi stessi teoremi per ogni specie di grandezze (1).

4) A ciò che abbiamo detto su ciascuno dei punti speciali sopra considerati poco ci rimane da aggiungere da ciò che riguarda il metodo e l'ordine generale di esposizione seguito dai nostri Autori.

Un tratto caratteristico, al quale abbiamo già avuto occasione di alludere, è costituito dallo sviluppo, notevolmente maggiore dell'ordinario che, sino dai primi capitoli, essi danno alla considerazione delle relazioni di posizione tra punti d'una retta, al concetto dei « versi » nel piano e nello spazio, alla distinzione delle varie parti in cui il piano può essere diviso da rette o da circonferenze, e lo spazio da piani, sfere ecc., ai quali soggetti pure si connette l'introduzione delle operazioni di « riunione » e di « interferenza », corrispondenti alle « somme » e « prodotti » (di classi di punti), considerate nella logica matematica, e l'applicazione loro alla definizione delle figure e alla discussione dei luoghi geometrici.

L'intera trattazione, pure essendo costantemente accompagnata da richiami all'intuizione e all'esperienza dei sensi, è tuttavia svolta in modo da presentare, indipendentemente da queste, il modello d'una concatenazione logica sulla quale tuttavia, specialmente per quanto riguarda i primi capitoli, l'insegnante farà bene a non troppo insistere in un primo studio, riservandosi di tornare sull'argomento a tempo più opportuno. Il compito dell'insegnante a questo riguardo sarebbe

(1) Tra tali dimostrazioni è notevole quella relativa all'operazione del « *comporre* » la quale, a differenza di quella che si trova in Euclide (v, 18). non fà uso del postulato dell'esistenza d'una grandezza quarta proporzionale dopo tre grandezze date qualunque. A tale postulato, come è noto, Euclide non ricorre in alcuna altra dimostrazione dello stesso libro.

Digitized by Google

stato tuttavia reso più facile se ad alcune delle dimostrazioni (quelle specialmente che presentano, per il principiante, il non lieve inconveniente di apparirgli inutili, in quanto portano a conclusioni che egli già conosce ed è indotto a riputare non meno « evidenti » degli assiomi mediante i quali gli vengono « dimostrate ») si fosse sostituita la semplice enunciazione loro sotto forma di postulato, rimandando a un appendice ogni considerazione sulla loro « dipendenza » dagli altri postulati già ammessi.

È in fatti di somma importanza che l'allievo arrivi *il più presto possibile* a vedere nel processo di dimostrazione un mezzo per passare dal noto all'ignoto, uno strumento cioè di prova e, ancora più, di ricerca, mentre solo più tardi potrà apprezzarne e gustarne l'efficacia come strumento d'analisi, e di riduzione al minimo, dei concetti e delle ipotesi fondamentali.

Se anche a questa esigenza didattica non fosse possibile uniformarsi senza rinunciare al vantaggio di raggiungere una forma di trattazione basata su postulati tutti fra loro indipendenti (tali cioè che nessuno di essi possa venir dedotto dai rimanenti) il sacrificio non sarebbe troppo grave, dal momento che l'unica condizione assolutamente imprescindibile per il rigore delle dimostrazioni è che i postulati siano fra loro compatibili (tali cioè che la negazione di qualsiasi di essi, non possa venir dedotta dai rimanenti). La qual compatibilità, qualunque sia il numero dei postulati introdotti, è sempre ugnalmente garantita dall'appello all'osservazione concreta, appello che, sotto una forma o un l'altra (aritmetica, geometrica o di qualunque altra specie) è pur sempre richiesto per tale scopo in qualsiasi trattazione, anche idealmente perfetta.

Non è da tralasciare un ultimo accenno all'abbondante raccolta di esercizi, nella cui scelta gli A. hanno avuto cura di dare preferenza a quelli che, sia per il loro interesse storico, sia perchè pongono in rilievo le relazioni tra le varie parti della teoria che, nella trattazione sistematica, sono trattate indipendentemente, si prestano in maggior grado a stimolare le attività intellettuali dell'allievo e indurlo alla ricerca personale.

Crema 13 Sett. 03.

G. VAILATI.

A. CAPELLI - *Istituzioni di analisi algebrica* - Terza edizione con aggiunta delle Lezioni di algebra complementare. — Napoli, Pellerano, 1902. XIX-714 p. 8° gr.

Questa edizione dell'ottimo trattato del prof. Capelli si distingue dalle due precedenti principalmente per l'aggiunta di alcuni capitoli

Digitized by Google

destinati ai fondamenti dell'aritmetica e dell'algebra. Nella compilazione di questi capitoli l'autore ha preso a guida le idee da lui espresse in alcune recenti memorie, e sviluppate nei suoi *Elementi di aritmetica ragionata e di algebra;* e poichè di quest'opera fu già parlato nel *Bollettino* (1902, p. 120-122), noi ci dispensiamo dall'entrare in particolari sull'argomento. Diremo solo che l'autore fonda il concetto di *numero* da quello di *aggregato finito,* e interpreta le operazioni sui numeri come operazioni combinatorie sugli aggregati. Appunto alle operazioni sui numeri naturali ed alle teorie che ad esse si connettono (divisibilità, sistemi di numerazione, ecc.) sono dedicati i primi due capitoli della presente opera. Dopo un capitolo sopra l'analisi combinatoria e la teoria dei gruppi di sostituzioni, si passa alle operazioni sui numeri razionali, a cui si giunge nel modo seguente:

Si suppone che le unità (ossia gli elementi degli aggregati che si considerano) sieno parte *di segno* o *senso positivo,* parte *di segno* o *senso negativo,* e che sì le une che le altre possano essere di 1.ª, 2.ª, 3.ª,... *specie.* Le unità dello stesso senso e della stessa specie si considerano come equivalenti; *n* unità di *n*-esima specie equivalgono ad una unità di 1.ª specie e dello stesso segno; due unità della stessa specie e di segno diverso equivalgono all'*aggregato nullo.* A completare le condizioni di equivalenza di due aggregati serve la *legge razionale dei valori,* che si enuncia così: *Due aggregati sono equivalenti, se esistono due aggregati equimultipli di essi deducibili l'uno dall'altro mediante un numero finito di operazioni dei seguenti due tipi:* a) *Sostituzione di un'unità di 1.ª specie ad* n *unità di* n*-esima specie, e viceversa;* b) *Soppressione o aggiunzione simultanea di due unità della stessa specie e di senso diverso.*

Le parti successive dell'opera non presentano, tranne che nell'ordine della materia, molte novità di fronte alle edizioni precedenti. Molto opportunamente l'autore ha trasportato la teoria dei numeri irrazionali dopo quelle dei determinanti, delle equazioni lineari e delle funzioni razionali intere che ne sono affatto indipendenti e, insieme all'analisi combinatoria, costituiscono la parte puramente algoritmica dell'algebra. Segue un capitolo nuovo, che potrebbe dirsi una introduzione al Calcolo infinitesimale, dedicato alla continuità ed alla derivabilità delle funzioni. Si passa poi alle equazioni a coefficienti reali ed alla risoluzione numerica delle equazioni; dopo di che vengono introdotti i numeri complessi — il che dà occasione all'autore di esporre i fondamenti della teoria delle funzioni ellittiche, e viene svolta la teoria generale delle equazioni algebriche: esistenza delle radici, funzioni simmetriche delle radici, discriminante, eliminazione, trasformazione, risoluzione algebrica. Un ultimo capitolo è dedicato ai fondamenti delle teorie delle forme, specialmente quadratiche, e degli invarianti e covarianti.

Digitized by Google

Dei pregi di quest' opera è inutile parlare; ne fa fede il fatto singolarissimo di essere essa, in pochi anni, giunta alla terza edizione. Non ultimo merito di essa è l' ampio corredo d' esercizi che accompagna i varî paragrafi, e che l'autore ha curato di rendere ad ogni ristampa sempre più copioso ed interessante.

G. VIVANTI.

NOTIZIE

UN AGRIMENSORE CREMONESE DEL SEC. XI: LEONARDO MAINARDI E LA SUA OPERA (1). — A cura del professor M. Curtze di Thorn è uscita or ora alla luce nelle *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, 1902, fasc. XII, p. 339 sgg., la *Artis Metrice Practice compilatio*, importante trattatello d'Agrimensura, scritto nella seconda metà del sec. XV da Leonardo Mainardi, geometra e matematico cremonese. Di Leonardo, quantunque abbia goduto bella fama, nel campo della disciplina che professava, non si ha quasi veruna notizia; chè il Vida nelle *Orationes* ben note in lode di Cremona, ed il Cantelli negli *Annales* (questi sotto l' anno 1496 c. 222 B) stanno paghi a farne un elogio inconcludente per i termini vaghi e generali con cui viene espresso. D' altro canto, nè Domenico Bordigallo, che pur durò quaranta anni quasi a commemorare nella cronaca sua quanti cremonesi di qualche conto scendessero nella tomba, nè Antonio Campi nella *Cremona fedelissima*, hanno per lui una parola. L'Arisi stesso nella *Cremona literata*, dedicando un breve paragrafo al Mainardi (paragrafo dal Curtze riferito) non fa che rammentare il trattatello da lui dettato, dichiarandosi debitore di tale notizia alla erudizione dell' amico suo P. L. A. Cotta di Novara. Nelle *Inscriptiones* di Cremona, messe fuori dal Vairani, uguale silenzio, benchè d' altri Mainardi vi siano recati i titoli funebri; talchè, tutto sommato, può sembrare lecito il sospetto che maestro Leonardo abbia trascorsa l' intera vita lungi dal suolo nativo. Ad ogni modo, converrebbe istituir qualch' altra ricerca negli archivi cremonesi, prima d' affermare che i documenti ne sono del tutto muti intorno a lui.

L' *Artis metrice practice compilatio* del Mainardi, scritta latinamente, si rinverrebbe, a detta del Curtze, solo in due codici del secolo XV, già proprietà di Baldassare Boncompagni, e dopo la deplorata

(1) Dall'Archivio storico lombardo, Serie III, Vol. XVII. 1902, p. 482-483.

Digitized by Google

dispersione della famosa biblioteca del dotto principe romano passata nelle mani d'un libraio antiquario di Monaco. A questi due mss. però deve aggiungersene un terzo, rimasto ignoto al Curtze, il quale si conserva nell'Ambrosiana di Milano, ed è certamente quello (sebbene l'erudito professore di Thorn giudichi diversamente p. 34) di cui il Cotta diede ragguaglio all'Arisi (1). Questo codice, una raccolta di trattati astronomici e matematici, messa insieme da Bartolomeo della Valle, architetto della Camera ducale, e stimatore del Comune di Milano (2), secondochè più e più volte si sottoscrive, ha per noi un certo interesse inquantochè, essendo stato compilato l'anno 1485 (3), ci dà prova come l'*Ars metrica* del Mainardi fosse da tempo divulgata, e ci autorizza quindi a credere che l'Autor suo la scrivesse verso il 1475 circa

Un quarto codice, appartenente alla biblioteca universitaria di Gottingen (*Cod. Philol.* 46), offre poi una traduzione in volgare dell'opera di Leonardo, notabilmente ampliata; ed è questa redazione appunto che il Curtze ha preferito mettere in luce in luogo del testo latino, perchè il suo interesse, sotto il rispetto degli studi matematici, è più ragguardevole. Il Curtze non si pronunzia sulla questione se la versione debba credersi dovuta al Mainardi o eseguita da un più tardo studioso (sempre vissuto però nel quattrocento): ed essa non è difatti di agevole soluzione. Lo spiccatissimo color veneto che vi ha la lingua dice assai poco, giacchè in Cremona, sullo scorcio del secolo XV, si scriveva appunto, come in tutta l'Alta Italia, in quell'ibrido linguaggio letterario, di cui tanti monumenti ci attestano l'antichità e la pertinacia.

(1) Siccome l'Arisi scrive che l'opera di Leonardo « ms. Mediolani servatur » e il cod. già Boncompagni 303 reca in fronte l'*Ex-libris* di Giovanni Sitoni di Scozia milanese, così il Curtze ha creduto legittima tale identificazione. Ma, com'è noto a quanti si sono occupati di studi cremonesi, tutte le notizie trasmesse dal Cotta nelle lettere sue all'Arisi sopra scrittori nati sulle rive del Po provengono dallo spoglio di mss. Ambrosiani che l'erudito novarese andava per suo conto rovistando.

(2) Il codice segnato I 253 inf., è cartaceo, di fogli recent. numer. 118, miss. m. 210 p. 314. Esso conserva l'antica rilegatura in assicelle, le vecchie guardie formate da due frammenti d'un atto notarile del secolo XIV. Il Della Valle vi ha ricopiato a nitidi caratteri un *Ars quadrantis et ius operatio* (c. 1, B - 10 A), una *Tabula ad sciendum mensem diem et horam introitus solis in quolibet signo* fatta nel 1321 e postullata nel 1395 (c. 10 B); l'*Ars metrica* del Mainardi (c. 11 A - 30 A), la *Tabula simuni* (c. 30 B - 33 A) ed i due libri dell'Aritmetica di Boezio (c. 36 A - 65 B). Da c. 67 A a 72 A si han poi alcune *Regule sopra lo algibra muchabile*, ed il resto è tutto bianco.

(3) Ved. a c. 35 B sotto certi versicoli l'iscrizione: *Liber mei B..... architecti et extimatoris comunis Mediolani scriptum* (sic) anno domini 1485. Così qui come altrove, un più tardo possessore del libro e successore nell'ufficio del Della Valle, Francesco Sitoni ha cancellato il nome di Bartolomeo per porre in luogo di esso il proprio (ved. c. 1 A, 35 A, 35 B, 118 B); ma non si è avveduto che il Della Valle s'era pur sottoscritto a c. 16 A: sicchè il suo sforzo di nascondersi la persona del copista e possessor primo del volume è andato a vuoto.

Digitized by Google

L' edizione del non agevole testo è stata condotta dal Curtze con molta diligenza, ed è tale da far onore nonchè ad un matematico, ad un filologo. Noi dobbiamo dunque professargli gratitudine schietta per aver tolto dall' oblio un documento cospicuo della scienza lombarda del Rinascimento.

F. Novati.

* * *

Ernesto Schröder nacque a Hannscheim il 25 Novembre 1841. Nel 1856 fu ammesso studente nel Liceo di Mannheim, dal quale fu quattro anni dopo licenziato. La spiccata attitudine di lui manifestata per gli studi fisico-matematici lo consigliò a recarsi a Heidelberg per studiare sotto la direzione di Hesse, Bunsen e Kirchhoff; quanto frutto egli abbia tratto da tali insegnamenti risulta dal fatto che nel 1862 egli potè già sostenere con buon successo l'esame di laurea. Nei due anni seguenti lo Schröder andò a Königsberg, per perfezionarsi negli studi in cui erano colà maestri F. Neumann e Richelot, e nel 1864 subì a Karlsruhe con ottimo risultato l' esame magistrale. Negli anni seguenti lo troviamo a Zurigo, libero docente in quel Politecnico, e poi, appena scoppiata la guerra franco-prussiana, volontario nel corpo di esercito, che, espugnata Strasburgo, dirigevasi vittorioso verso Digione. Richiamato in patria dal Ministero della pubblica Istruzione, a partire dal 1.° Novembre 1870 fu insegnante di matematica e storia naturale nel Ginnasio di Baden-Baden, posto che egli occupò sino al 1874. Donde la giusta rinomanza di scienziato lo tolse per farlo Professore di matematica nel Politecnico di Darmstadt e poi (1876) in quello di Karlsruhe; quest' ultimo ufficio egli tenne fino al giorno della sua morte, avvenuta improvvisamente il 16 Giugno 1902.

Il nome di Schröder è noto, oltre che per un buon numero di lavori speciali (1), per un profondo trattato di aritmetica ed algebra (sventuratamente incompleto) e per le sue ricerche sul calcolo logico, al quale aveva deciso di dedicare una opera monumentale, che un avverso destino gli vietò di compiere.

* * *

Massimiliano Curtze (2), che per consenso universale era considerato pel più profondo conoscitore della matematica medievale, morì a Thorn il 3 Gennaio u. s. Era nato a Ballenstedt nell' Harz il 4 Agosto

(1) Se ne vegga l'elenco al termine della bella necrologia che ne scrisse J. Lüroth *(Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinig.*, T. XII, 1903).

(2) Cf M. Cantor, *Maximilian Curtze* (Jahresber. der Deutschen-Math. — Ver. T. XII. 1903)

Digitized by Google

1837. Compiuti gli studi secondari nel Ginnasio di Berburg, si recò all' Università di Greifswald, ove ebbe maestro A. Grunert, del quale subì un influenza decisiva che il tempo non ebbe forza di cancellare. Superato l'esame magistrale, fu inviato al Ginnasio di Thorn, ove rimase, percorrendovi tutti i gradi, sino al 1896, anno in cui venne collocato a riposo. Vanno ricordati, pei notevoli risultati che diedero, i viaggi di studio fatti dal Curtze uno nel 1873 (con un sussidio del Principe Boncompagni), l'altro nel 1896. L'elenco delle sue numerose ed importanti pubblicazioni, redatto da un amico del defunto (1), dà un' idea della sua feconda operosità; senza addentrarci in un minuto analisi di essa, dobbiamo ricordare che il Curtze, traducendo in tedesco lavori di Battaglini, Beltrami, Brioschi, Cremona, Sella e Schiaparelli ha contribuito a diffonderne la benefica influenza oltre i confini naturali d' Italia ed a rendere popolari, anche fra i suoi conterranei, i nomi di questi grandi; è una benemerenza di cui noi italiani dobbiamo tener il massimo conto.

* * *

J. W. Gibbs, nato a New Haven l' 11 Febbrajo 1839, morì professore di Fisica matematica alla « Yale University » il 28 Aprile 1903. La sua opera scientifica consta di lavori di termodinamica e di scritti sull' analisi vettoriale; i primi furono analizzati da Percey F. Smith nel Fascicolo di Settembre 1903 dell'*American Journal of Science*, gli altri dallo stesso nel *Bulletin of the Amer. math. Society* dell' Ottobre decorso.

* * *

Un austriaco dimenticato è Giuseppe Petzwald, al quale il Prof. Gegenbauer dedicò un'esauriente ed eloquente orazione, recentemente riprodotta nel *Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung* (T. XII, p. 3[illegible]4-344). Il Petzwald nacque il 6 Gennajo 1807 a Bela; fu professore nell' Università di Pest dal 1832 al 1835, poi in quella di Vienna finchè, colpito dal limite d' età allo spirare dell' anno scolastico 1876-1877, venne d' ufficio collocato a riposo. Si spense il 17 Settembre 1891. Sono generalmente note ai matematici le sue ricerche sopra le equazioni differenziali; ma nel campo della fisica applicata il nome del Petzwald è popolare per le sue indagini di acustica (a lui si deve il motto « la matematica è la musica dell' intelletto, mentre la musica è la matematica del senso ») e di ottica. Il Gegenbauer rileva che il Petzwald fu uno dei primi e più illustri sostenitori

(1) S. Günther, *Maximilian Curtze* (Bibl. math. 3.ª Serie, T. IV, 1903).

Digitized by Google

dell'idea che la matematica per progredire deve allearsi fraternamente alla pratica; egli, che del Petzwald fu il successore, dichiara di abbracciare tale idea e di avere ad essa informato la sua opera di insegnante. Basti ciò a provare che il discorso del Gegenbauer ha un significato più alto di un semplice elogio funebre.

* * *

UNA NUOVA RIVISTA DI MATEMATICA. — Nel fascicolo di Aprile-Giugno 1903 di questo periodico abbiamo segnalata la comparsa di un volume attestante l'esistenza di vita matematica nel lontano Chilì. A conferma di ciò, ci stanno oggi dinnanzi i primi fascicoli di una pubblicazione mensile, intitolata « Revista de Matematicas », che si pubblica a Santiago de Chile, sotto la direzione di Luis A. Silva ed avente per iscopo di completare l'istruzione degli studenti ed eccitare l'emulazione fra di essi con opportune questioni a risolvere. Possa tale nobile intento venire conseguito!

* * *

PER LA STORIA DEL GIORNALISMO MATEMATICO. — Il Prof. F. Müller, oltre a pubblicare l'elenco di circa 1200 pubblicazioni periodiche interessanti le scienze esatte, ha fornito (*Jahresber. der deutschen Math.-Verein.*, 1903) notevoli ed esatte notizie intorno alle stesse, da cui certamente trarrà gran profitto chi in avvenire si accingerà all'utile impresa di scrivere la storia del giornalismo matematico.

* * *

PUBBLICAZIONI CONCERNENTI G. SACCHERI. — Il Prof. A. Favaro ha pubblicato nel N. 47 della *Rivista di fisica, matematica e scienze naturali* di Pavia *Due lettere inedite del P. Gerolamo Saccheri d. C. d. G. a Vincenzo Viviani*, che, nell'originale, esistono nella celebre collezione dei « Manoscritti Galileiani » conservati nella Biblioteca Nazionale di Firenze. Esse, nonchè le illustrazioni di cui le corredò il dotto editore, vanno segnalate ai cultori della storia della geometria non-euclidea. Va notato che, verso il termine di tale scritto, è fatta menzione « di una *Logica demostrativa*, che forse potrebbe far penetrare più addentro nei criteri scientifici dell'autore »; ora che tale supposizione fosse fondata venne dimostrato dal Prof. G. Vailati, il quale nell'interessante articolo intitolato *Di un' opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri* (Rivista filosofica, Settembre-Ottobre 1897) ha fatto un'analisi profonda della *Logica demostrativa* e ne ha tratto delle conseguenze le quali projettano gran luce sul

Digitized by Google

processo logico che guidò il Saccheri alle conclusioni che tanta fama recentemente gli diedero (1).

Non potremo chiudere meglio questi cenni, sopra contributi recenti alla letteratura Saccheriana, che citando il recente manuale Hoepli: *L'Euclide emendato del* P. Gerolamo Saccheri. *Traduzione e note del Prof.* G. Boccardini (Milano, 1904); grazie al quale l'avere a propria disposizione l'opera del dotto gesuita non sarà più un privilegio di pochi eletti; tale pubblicazione è un doveroso omaggio che l'Italia rende ad uno dei suoi matematici più originali.

* * *

Biblioteca Scolastica. — F. G.-M. *Cours d'algèbre élémentaire conforme aux derniers programmes*, Tours - Paris, 8.° p. VIII + 568. [Questo volume (il quale fa parte della nota collezione pubblicata dai « Frères des Ecoles chrétiennes ») va segnalato e raccomandato per la redazione accurata e per la ricchissima raccolta di esercizi (in numero di 1824)].

A. Capelli, *Elementi di aritmetica ragionata e di algebra.* Libro III. I numeri negativi. Napoli, Pellerano 1904, 8.° p. VIII + 112 [Cfr. il resoconto sulla parte precedente di quest'opera, *Bollettino*, T. V, 1902, p. 120].

E. Lebon, *Géométrie descriptive et Géométrie côtée conforme aux programmes du 31 Mai 1902 pour l'Enseignement secondaire.* Classes de Première C et D. Paris, Delalain, 8.° p. 119 [Il piano di questo manualetto è il medesimo, ma in iscala un po' ridotta, di quello su cui è scritto il volume dello stesso autore che segnalammo nel T. IV 1901 del *Bollettino*, p. 86; ripetiamo quindi il consiglio agl'insegnanti dei nostri Istituti tecnici di esaminarlo prima di scegliere il testo di geometria descrittiva].

Orlando L., *Esercizi di calcolo infinitesimale.* I. Messina, 1903. [Prezzo L. 2,50].

F. J. *Eléments d'arithmétique, avec de nombreux exercises.* Tours-Paris.

* * *

Secondo Congresso di Filosofia. — Per iniziativa di P. Tannery, una sezione autonoma relativa alla Storia delle Scienze sarà organizzata nel II Congresso di Filosofia che avrà luogo a Ginevra al

(1) Veggansi anche i due articoli dello stesso autore: *La teoria aristotelica della definizione* (Rivista di filosofia e scienze affini, T. V, 1903) e *Aggiunte alle note storiche del « Formulario »* (Révue de mathém., T. VIII, 1903).

Digitized by Google

principio di Settembre 1904. — Rivolgersi, per le comunicazioni, a « M. Paul Tannery, directeur de la Manifacture des Tabacs de Pantin (Seine) »; e per qualunque altra cosa a « M. Ed. Claparède, Segretario generale del Congresso, 11 Champel, Genève ».

***

Riproduzioni diplomatiche di classici. — La ben nota casa editrice A. Hermann, si è di recente acquistata nuovi titoli di riconoscenza da parte dei cultori delle scienze esatte riproducendo in *fac-simile* due opere a buon diritto annoverate fra quelle classiche: cioè l'*Examen des différentes méthodes employées pour resoudre les problèmes de géométrie* di G. Lamé e le *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* di Sadi Carnot. Siccome questi due scritti erano finora vere rarità bibliografiche, così la loro riproduzione (al prezzo, relativamente modesto, di 5 fr. ciascuna) verrà salutata con soddisfazione dalla generalità dei matematici.

***

Corrispondenza scientifica di Descartes. — Col V vol., finito di stampare il 20 Marzo 1903, delle *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique* (Paris, L. Cerf) è completata la pubblicazione delle lettere, tuttora esistenti, appartenenti al carteggio del sommo scienziato. Tale raccolta, fatta con i metodi rigorosi ed esatti caratteristici della moderna critica letteraria, onora tanto gli egregi uomini che vi presiedettero quanto il paese ove apparve, e dovrà essere consultata da tutti coloro che in avvenire tratteranno della storia scientifico-letteraria del periodo 1622-1650.

***

Annuaire pour l'an 1904 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, 16.° p. IV + 732 + 23 + 53 + 41. [Prezzo fr. 1.50; franco 1.85].

Questo volume, ben degno di quelli che lo precedettero, oltre ai soliti preziosi articoli, contiene le seguenti memorie scientifiche:

Bouquet de la Grye, *Note sur la Conférence géodétique internationale tenue à Copenhague en août 1903.*

Hatt, *Théorie élémentaire des marées.*

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1904.

Digitized by Google

ANNO VII. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1904.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. VAILATI: *La dimostrazione del principio della leva data da Archimede,*

Recensioni ed annunzi: BIANCHI, *Geometria differenziale* [C. Rimini]. — SCHIAPARELLI, *L'astronomia nell'antico testamento* [F. Porro] — MAGGI, *Stereodinamica* [R. Marcolongo]. — CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* [P. Pizzetti]. *International Catalogue* [G. L.].

Notizie: I premi dell'Istituto di Francia. — Tema proposto dal Politecnico di Monaco. — Un'opera in preparazione. — M. Hamburger. — Esposizione di modelli. — Una nuova collezione di modelli di geometria.

LA DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DELLA LEVA DATA DA ARCHIMEDE

NEL LIBRO PRIMO SULL'EQUILIBRIO DELLE FIGURE PIANE

DI

GIOVANNI VAILATI

La via, seguendo la quale Archimede arriva alla conclusione che due pesi, pendenti da un'asta girevole intorno a un suo punto, si fanno equilibrio quando sono inversamente proporzionali alle distanze degli estremi corrispondenti dal centro di rotazione, consiste, come è noto, nel fare appello alla proposizione che, a un dato peso applicato a un punto qualunque di detta asta, si può sempre sostituire, senza turbare l'equilibrio se questo prima sussisteva, una coppia di pesi uguali ciascuno alla metà del peso dato purchè questi si appendano a due punti situati da diversa parte e a egual distanza da quello a cui era appeso quest'ultimo.

La validità di questo procedimento dimostrativo è stata posta in questione dal Mach nell'esposizione critica che egli ne fa nella sua storia della meccanica (1). L'obiezione che egli solleva contro la

(1) E. MACH. *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch kritisch dargestellt*, IV Ediz. 1903, a pag. 16-17. Vedasi anche la traduzione francese (Paris, Hermann 1904) a pag. 22.

Digitized by Google

dimostrazione d'Archimede consiste nell'asserire che la premessa sopra accennata, della quale in essa si fa uso, non può essere dedotta dai postulati ammessi da Archimede e che si trovano enunciati in principio della sua trattazione.

Nè a ciò si limita l'obiezione del Mach: l'ammettere la suaccennata proposizione, l'ammettere cioè che lo spostare il punto d'applicazione della metà di un dato peso non turbi l'equilibrio, quando sia accompagnata dallo spostamento, in direzione inversa, del punto di applicazione dell'altra metà, sembra inoltre a lui equivalga già a presupporre che l'equilibrio non possa essere turbato se non da spostamenti che alterino il valore della somma dei prodotti di ciascun peso per la relativa distanza dei loro punti di applicazione dal centro di rotazione; equivalga cioè già a presupporre la proposizioue che Archimede vorrebbe dedurre da essa.

A questa osservazione critica che, tenderebbe a qualificare la dimostrazione di Archimede come un circolo vizioso, si può opporre anzitutto che l'equivalenza, asserita dal Mach, tra le due suddette proposizioni non sussiste che in parte inquantochè è vero bensì che gli spostamenti che nella prima di esse sono qualificati come non atti a turbare l'equilibrio rientrano tra quelli che anche dalla seconda proposizione sono qualificati come non atti a turbarlo, ma non è vero il reciproco, poichè la seconda proposizione considera una classe di spostamenti di cui quelli considerati dalla prima costituiscono solo un caso particolare. Dal che deriva che la premessa su cui si basa il ragionamento d'Archimede asserisce solo *una parte* della conclusione generale a cui egli arriva partendo da essa. Egli, cioè, partendo dalla supposizione che l'equilibrio non possa esser turbato da una certa specie di spostamenti, dimostra che esso non sarà turbato neppure da altri spostamenti costituenti una classe di spostamenti più generale di quelli considerati nella sua premessa (1).

Questo modo tuttavia di difendere la validità del ragionamento di Archimede dall'imputazione di essere un circolo vizioso lascia ancora aperto l'adito a replicare che Archimede, pure non presupponendo nelle sue premesse tutto ciò che è asserito nella sua conclusione, pure presuppone tal cosa che alla sua volta non può essere dimostrata se non per mezzo della conclusione stessa, e che ad ogni modo non ha maggior diritto a essere assunta come evidente di quanto ne abbia quest'ultima.

(1) Il procedimento seguito da Archimede trova quindi perfetto riscontro in quelli proposti da parecchi autori moderni (per es. dal Cauchy e dal Möbius) per dedurre il principio della composizione delle forze, mediante la risoluzione di equazioni funzionali basate su ipotesi più semplici relative alla risultante di coppie di forze uguali.

Digitized by Google

A questa forma che può assumere l'obiezione del Mach è stato risposto che la premessa, assunta da Archimede, è effettivamente suscettibile di essere dimostrata ricorrendo, oltre che agli assiomi da lui enunciati, anche a un altro assioma che Archimede applica tacitamente e che si potrebbe enunciare dicendo che: un corpo rigido è in equilibrio quando le forze (o i pesi) ad esso applicate risultino come l'insieme di due sistemi di forze (o pesi) ciascuno dei quali, applicati separatamente, lo manterrebbero in equilibrio, e, reciprocamente, un corpo rigido non è in equilibrio se le forze (o i pesi) ad esso applicate risultino come l'insieme di due sistemi dei quali l'uno, applicato separatamente, lo manterrebbe in equilibrio e l'altro invece no (1).

Il fatto tuttavia che da questo assioma si possono dedurre tutte le presupposizioni sulle quali si basa, come vedremo, la dimostrazione di Archimede, non permette ancora di riguardare come risolta la questione storica se queste siano state da Archimede effettivamente riguardate come giustificabili in tal modo o non più tosto per qualche altra via affatto differente.

Ora io credo che questo sia appunto il caso e che la via per cui Archimede arrivò alla proposizione che l'equilibrio non è turbato dal sostituire a un peso due pesi, eguali ciascuno alla sua metà e pendenti a egual distanza dal punto a cui era applicato il peso totale, vada cercata in alcune considerazioni relative al centro di gravità alle quali Archimede fa ripetutamente accenno nel corso delle sue dimostrazioni pur senza insistervi come se si trattasse di argomento già da lui svolto in qualche antecedente trattazione a noi non pervenuta.

Questi accenni ai quali, pare a me, che tanto il Mach quanto altri (2) abbiano mancato di fare sufficiente attenzione si riferiscono alle seguenti proprietà del *centro di gravità* di un corpo rigido: centro di gravità che Archimede definisce come « *quel punto tale che sospendendo il corpo per esso questo rimanga in equilibrio qualunque sia la posizione in cui venga collocato* ».

1) — *Se un corpo rigido s'immagina diviso in due parti, la retta che congiunge i centri di gravità di questi contiene il centro di gravità del corpo intero.*

2) — *La posizione di questo centro di gravità su tale retta dipende solo dal peso delle due parti in cui il corpo è stato diviso*

V. O. Holder, *Anschauung und Denken in der Geometrie* (Leipzig 1901), pag. 64.

(2) Per esempio l'Holder il quale, nel già citato opuscolo parla non meno risolutamente del Mach di « *Scheinbare Gebrauch* », che Archimede farebbe, del centro di gravità.

Digitized by Google

e non varia comunque esse si deformino purchè la deformazione avvenga in modo che non si spostino i loro rispettivi centri di gravità.

La prima di queste due proposizioni è espressamente enunciata da Archimede (1) che la qualifica come un teorema già dimostrato.

Quanto alla seconda essa può pure esser dedotta dal solo ammettere che per ogni corpo esista uno, e un solo, centro di gravità nel senso sopra riferito, e che inoltre le sole posizioni in cui il corpo può stare in equilibrio, quando appeso da un punto diverso dal suo centro di gravità, siano quelle nelle quali tale centro di gravità si trova sulla verticale passante pel punto a cui il corpo è sospeso (2).

Da ciò si può infatti dedurre immediatamente la proposizione 2) procedendo nel modo seguente: si immagini il corpo sospeso pel suo centro di gravità e collocato in modo che la retta che congiunge i centri di gravità delle due sue parti sia orizzontale. Si immagini allora che le due parti cessino di avere tra loro alcun vincolo eccetto quello di avere i loro centri di gravità collegati da un'asta rigida: che il sistema cioè si riduca a una bilancia a braccia disuguali ai cui due estremi pendano due pesi rappresentati dalle due parti in cui esso è stato diviso.

Tale bilancia sarà in equilibrio: se infatti non lo fosse si potrebbe determinare sull'asta un altro punto diverso dal primitivo punto di sospensione e tale che, sospendendola per esso, l'equilibrio sussista. Immaginando allora che le due parti del corpo siano di nuovo rigidamente saldate tra loro, l'equilibrio continuerà a maggior ragione a sussistere, il che è incompatibile col fatto che la verticale condotta pel punto ultimamente considerato non passa per il centro di gravità del corpo intero.

Dimostrato così che la suddetta bilancia a braccia disuguali resta in equilibrio quando è sospesa dal centro di gravità dell'intero corpo, se ne deduce che essa rimarrà pure in equilibrio anche se si deformano comunque le due porzioni del corpo purchè i centri di gravità di queste non cessino di coincidere coi suoi estremi. Dal che deriva che anche la deformazione delle parti non ha avuto alcuna influenza nella posizione che il centro di gravità del corpo intero occupa sulla congiungente i centri di gravità delle due parti in cui esso si è considerato diviso. Il che è ciò che si voleva provare.

---

(1) V. Edizione Heiberg (Teubner): Vol. II, pag. 149.

(2) Delle considerazioni che possono aver guidato Archimede a queste due ammissioni fondamentali, ci è conservata qualche traccia in alcuni frammenti riportati da Pappo, nella sua Collezione matematica (Libro 8.°), dei quali mi sono già occupato in una Nota « *Sul concetto di centro di gravità nella Statica d'Archimede* » (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino 1897).

Digitized by Google

***

Il modo più semplice di dedurre dalla proposizione così ottenuta il principio della leva è quello di applicarla al caso di un rettangolo che si immagini diviso in due parti disuguali mediante una retta parallela a uno dei suoi lati.

Questa è appunto la via seguita da Archimede nel Libro dei piani equiponderanti.

Una forma breve ed elegante che si può dare a tale dimostrazione è la seguente dovuta a Luca Valerio.

Ammesso per ragioni di simmetria che il centro di gravità di un rettangolo si trovi nel punto d'incontro delle sue diagonali, si consideri un rettangolo A B C D e lo si divida, mediante una parallela al lato A B, in due rettangoli disuguali A B E F, F E C D. Si conducano le tre diagonali A C, A E, F C, e si conduca per il punto di mezzo della A B, la parallela ad A D che incontrerà le dette diagonali nei tre punti L, M, N, centri di gravità dei tre rettangoli. Poichè L M è uguale alla metà di E C ed L N alla metà di A F, si deduce che il centro di gravità L del rettangolo totale divide il segmento M N in parti inversamente e proporzionali alle aree dei due rettangoli in cui esso è stato scomposto.

Se ora immaginiamo la figura sospesa pel punto L essa rimarrà in equilibrio e, per quanto si dimostrò sopra, tale equilibrio continuerà a sussistere se si immaginano i due rettangoli separati l'uno dall'altro e resi girevoli intorno ai loro centri di gravità, purchè questi si colleghino rigidamente con un'asta rigida girevole intorno ad L. Il che ci dà appunto una leva ai cui estremi pendono pesi inversamente proporzionali alle distanze del loro punto di sospensione dal fulcro.

***

Le considerazioni precedenti mi sembrano sufficienti non solo a porre in chiaro quanto la dimostrazione d'Archimede sia lontana dal meritare d'esser qualificata come una petizione di principio, ma anche a far vedere per qual ragione essa abbia potuto apparir tale a un investigatore così acuto e diligente come il Mach. Il fatto che alle proposizioni relative ai centri di gravità sulle quali essa si basa si giunge, nella trattazione attuale della meccanica razionale, per una via nella quale si fa uso del principio della leva, o di altra proposizione più generale sulla composizione delle forze predispone naturalmente il lettore moderno a presupporre che questa o analoga a questa fosse anche la via per la quale Archimede era pervenuto ad essa.

Ora, tale presupposizione è ben lontana dal trovare conferma negli scritti d'Archimede dai quali risulta invece come le proprietà dei

Digitized by Google

centri di gravità a cui egli ricorre, non erano per lui che delle conseguenze di un certo numero di ammissioni fondamentali alle quali egli attribuiva lo stesso carattere di evidenza intuitiva e la stessa capacità a servir di base a una serie di dimostrazioni che si attribuisce ai postulati della geometria o dell'aritmetica.

Di tali assiomi meccanici alcuni sono da Archimede enunciati al principio dell'opera, in cui di essi si fa uso, mentre altri, di meno frequente applicazione, sono accennati solo nel momento in cui occorre servirsene, e altri ancora, precisamente come avviene di certi assiomi geometrici nei libri d'Euclide, sono tacitamente applicati senza alcuna espressa enunciazione.

Una differenza caratteristica che, oltre il loro maggior grado di evidenza intuitiva, distingue tali assiomi dalle proposizioni che da essi si deducono, consiste in ciò che essi, come osserva appunto l'Hölder nell'opuscolo già citato sopra, si riferiscono a fatti dell'esperienza più ordinaria facili a constatare e provare indipendentemente da qualsiasi operazione di confronto sistematico tra i fatti in cui essi si trovano realizzati, e senza bisogno di assoggettare questi a precise e numerose misure quali si richiederebbero, per esempio, se si dovesse ottenere induttivamente il principio della leva.

Qualunque opinione si possa avere sull'opportunità attuale di una trattazione della statica dei corpi rigidi che prenda le mosse dalle proposizioni fondamentali assunte da Archimede, o sui vantaggi che presenta il dedurre queste ultime da altre supposizioni più generali o più elementari (per esempio dal principio dei lavori virtuali, di cui il principio stesso della leva non è che un caso particolare) sembra a me compatibile col riconoscere la perfetta legittimità del procedimento mediante il quale Archimede ha dedotto le sue conclusioni dalle sue premesse.

La taccia di « *Scheinbeweis* » applicata a tale procedimento pel fatto che in esso si parte dalla considerazione di un caso particolarissimo di equilibrio (quello cioè di due pesi uguali applicati a due punti di uno stesso braccio d'una bilancia, di cui l'altro braccio è caricato di un peso eguale alla loro somma) per arrivare a determinare le condizioni di equilibrio per tutta una classe più generale di casi non mi sembra per nulla più giustificato di quanto sarebbe per esempio l'obiettare in geometria alla dimostrazione d'una proposizione sui poligoni il fatto che essa sia basata sulla considerazione delle proprietà dei triangoli che pure sono poligoni anch'essi.

E l'asserzione che nelle premesse di Archimede sia già implicitamente contenuta la conclusione che egli ne deduce, sembra a me esser vera solo nel senso in cui è vera di qualsiasi dimostrazione matematica in quanto in ciascuna di queste la verità della proposi-

Digitized by Google

zione che si dimostra compare come una semplice conseguenza di opportune operazioni di scelta, di concatenamento, di coordinazione eseguite sulle proposizioni fondamentali che si sono poste a base della trattazione.

RECENSIONI ED ANNUNZI

LUIGI BIANCHI. — *Lezioni di Geometria differenziale.* — Seconda edizione riveduta e considerevolmente aumentata in due volumi — in 8.° grande: 1.° vol. pagg. V-523, 1902; 2.° vol. pagg. IV-594, 1903. — Pisa, Spoerri [Prezzo L. 18 + 22].

Questa nuova edizione delle *Lezioni di Geometria differenziale* comparse dapprima litografate nel 1886, poi stampate nel 1894 (Pisa, Spoerri) è notevolmente aumentata in confronto alla precedente e, come l'A. avverte nella prefazione al 1.° volume, divisa in due volumi, corrispondenti « all'incirca alla divisione delle teorie in generali e speciali ».

Il primo volume contiene, oltre i primi dieci capitoli dell'antica edizione, riprodotti integralmente, salvo qualche lievissima modificazione, quattro ulteriori capitoli, uno dei quali (il XII) corrisponde al XIV della prima edizione, e gli altri tre contengono, con numerosissime aggiunte e maggiori sviluppi, i principî della teoria degli spazi ad n dimensioni esposti nell'edizione tedesca del Trattato (1).

Il primo capitolo è interamente dedicato ad una succinta e concettosa trattazione della teoria delle curve gobbe, e vi notiamo l'esposizione della teoria di quella trasformazione delle curve, che l'A. chiama « trasformazione di Combescure » e lo studio dell'equazione delle traiettorie ortogonali di un sistema ∞^1 di sfere, argomenti non trattati nella precedente edizione.

Il II capitolo contiene i principî della teoria della trasformazione delle forme differenziali quadratiche, le equazioni fondamentali di Christoffel per l'equivalenza di due forme, il calcolo di invarianti e parametri differenziali, secondo i fecondi concetti di Beltrami e Ricci, con speciale applicazione alle forme binarie, per le quali si introduce l'importante nozione di curvatura, e alle coppie di forme binarie simultanee.

(1) *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Deutsch von M. Lukat — Teubner, Leipzig, 1899.

Digitized by Google

I seguenti quattro capitoli contengono l'esposizione dei fondamenti della teoria delle superficie, considerata, secondo l'indirizzo inaugurato da Gauss, come studio di due forme differenziali quadratiche, a cui se ne può associare una terza (elemento lineare sferico), non essenziale, ma la cui considerazione reca numerosi contributi e vantaggi alla teoria. Il VI capitolo, dedicato più specialmente allo studio delle linee geodetiche tracciate su una superficie, contiene numerose e importanti proposizioni relative alla proprietà di queste linee e all'integrazione delle loro equazioni differenziali.

Il capitolo VII è dedicato alla teoria dell'applicabilità delle superficie in generale con speciale riguardo alle superficie di curvatura costante e a quelle applicabili sopra superficie di rotazione. Esso contiene inoltre parecchi notevoli teoremi relativi alla deformazione delle superficie considerate come veli flessibili ed inestendibili.

Il seguente capitolo VIII studia le superficie rigate generali e la teoria della loro deformazione.

L'A. poi, esposte nella prima parte del capitolo IX le formole fondamentali relative alle due falde dell'evoluta di una superficie qualunque, passa poi a dimostrare i classici teoremi di Weingarten sulle evolute delle superficie W, cioè di quelle i cui raggi principali di curvatura sono funzione uno dell'altro, ed a studiare le più notevoli proprietà di queste superficie.

Il X capitolo contiene i principî fondamentali della teoria delle congruenze di rette e l'esposizione degli intimi legami che passano fra questa e la teoria generale delle superficie.

Nel capitolo XI, poste le convenzioni fondamentali per l'estensione delle teorie precedenti agli spazi ad n dimensioni, e stabilita la legge fondamentale di misurazione delle lunghezze e degli angoli secondo il concetto di Riemann, *Beltrami*, *Ricci*, ecc., l'A. dà le equazioni differenziali delle linee geodetiche ed estende a queste i principali teoremi dell'analoga teoria delle superficie, dopodichè arriva all'importante nozione di *curvatura* secondo Riemann. Provata l'esistenza di spazi di curvatura costante assegnata, dimostra il teorema, dovuto a Schur, secondo il quale la curvatura di uno spazio non può essere funzione soltanto della posizione del punto, senza essere assolutamente costante; e dà, pel caso $n = 3$, la nozione di curvature principali (Christoffel — Ricci). — Segue la definizione di forme fondamentali di una ipersuperficie, e una deduzione molto elegante delle equazioni fondamentali fra i loro coefficienti (generalizzazione delle equazioni di Gauss e Codazzi) dalle formole generali di Christoffel relative alla trasformazione di due forme (quadratiche). — Introdotto poi il concetto di *flessione* e di direzione *normale principale* di una curva, si estendono alle ipersuperficie degli spazi curvi il

Digitized by Google

teorema di Meunier, il concetto di curvature principali e di linee di curvatura, e la formola di Eulero. — Seguono le proprietà generali degli spazi in rappresentazione conforme e l'estensione del noto teorema di Liouville relativo alle rappresentazioni conformi dell'ordinario spazio euclideo in sè. Il capitolo si chiude con considerazioni sui sistemi n^{pli} ortogonali in un S_n qualunque e coll'estensione agli S_3 comunque curvi dei teoremi di Dupin e Darboux sui sistemi tripli ortogonali dell'ordinario spazio.

Il capitolo XII, dedicato alla Geometria pseudosferica a due dimensioni, contiene tutti gli sviluppi del capitolo XVI della prima edizione. In esso l'A., partendo da una rappresentazione conforme della molteplicità pseudosferica a due dimensioni (cioè di una varietà a due dimensioni definita *unicamente* da un ds^2 a curvatura costante negativa) sul semipiano, studia le geodetiche e i *movimenti* della varietà (applicabilità della varietà in sè stessa), introduce la nozione di geodetiche parallele, e dà le formole di trigonometria pseudosferica; poi, dedotta dalla precedente la rappresentazione *geodetica* di Beltrami, dà un cenno sulla geometria non-euclidea; e il capitolo si chiude con la introduzione delle coordinate di Weierstrass nel piano non-euclideo e la deduzione delle equazioni a derivate parziali di Weingarten per le coordinate di Weierstrass.

Il seguente capitolo XIII si occupa della geometria negli spazi a curvatura costante e, in una sua parte, non è che l'estensione ad n qualunque delle teorie svolte nel precedente capitolo per $n = 2$.

Stabilite alcune forme tipiche per gli elementi lineari degli spazi a curvatura costante e dedottone nuovamente il teorema sull'applicabilità di due spazi colla stessa curvatura costante, l'A. studia la rappresentazione conforme dello spazio *pseudosferico* (a curvatura costante negativa) ad n dimensioni sul semi-iperspazio euclideo S_n, estendendo ad n qualunque la analoga rappresentazione data per $n = 2$ delle superficie pseudosferiche; e dà, pel caso di $n = 3$, le notevoli formole di Poincaré pei movimenti di un tale spazio. Dopodichè, dalla rappresentazione studiata, l'A. deduce la rappresentazione geodetica di Beltrami. Osservata poi la legge di misurazione della distanza geodetica di due punti, è condotto a parlare della metrica di Cayley e delle coordinate di Weierstrass nella metrica ellittica ed iperbolica Cayleyana e ad estendere a questo caso più generale le equazioni a derivate parziali di Weingarten per le coordinate di Weierstrass studiate nel capitolo precedente. Il resto del capitolo è dedicato a uno studio particolareggiato delle circostanze speciali che si presentano nello spazio ellittico a tre dimensioni. Stabilite le formole generali dei movimenti di tale spazio, l'A. distingue quei movimenti particolari dello spazio ellittico detti *scorrimenti* (Schiebungen), per i quali

Digitized by Google

è costante la distanza tra l'antica e la nuova posizione dei singoli punti, e ai quali si lega la considerazione delle *congruenze di Clifford*. L'A. introduce poi l'importante nozione di *parallelismo* secondo Clifford, e ne sviluppa le conseguenze, tra cui i notevoli teoremi sulle rigate delle congruenze di Clifford e sulle proprietà delle superficie di Clifford. — Termina il capitolo l'estensione allo spazio ellittico ed iperbolico a tre dimensioni delle formole di Frenet, seguita da un'applicazione alle curve a torsione costante.

Nel capitolo XIV, ultimo del primo volume, l'A., estendendo dapprima allo spazio euclideo ad n dimensioni l'ordinaria teoria delle superficie, dimostra che le equazioni di Gauss e di Codazzi tra i coefficienti delle due forme fondamentali di una ipersuperficie sono sufficienti per l'esistenza della corrispondente varietà. Osserva poi i singolari risultati sulla indeformabilità (in generale) di una ipersuperficie immersa in uno spazio euclideo ad $n > 3$ dimensioni e sulla impossibilità di collocare in un tale spazio una ipersuperficie di elemento lineare dato a priori. L'A. estende in seguito la definizione di linee di curvatura, il concetto di superficie evoluta ed alcuni teoremi ad essa relativi, introduce anche qui una terza forma fondamentale (elemento lineare della rappresentazione sferica) per la quale hanno luogo formole e proprietà affatto analoghe alle corrispondenti della teoria delle superficie; le formole di Weingarten relative alle coordinate tangenziali sono pure suscettibili di una simile estensione. Seguono le ricerche di Darboux sulle ipersuperficie V_n le cui linee di curvatura si possono associare in un sistema n^{plo} ortogonale di varietà V_{n-1}. Gli sviluppi precedenti trovano, nei §§ seguenti, i loro analoghi relativi a spazi S_n ellittici ed iperbolici. Il capitolo termina con uno studio più diffuso delle superficie negli spazi a tre dimensioni ellittici ed iperbolici; ivi sono tratteggiati i punti principali della teoria e messe in evidenza le divergenze dalla ordinaria teoria delle superficie dello spazio euclideo.

Il *secondo volume* è diviso in tredici capitoli, alcuni dei quali riproducono, con numerosissime aggiunte, gli ultimi dieci dell'antica edizione, altri sono assolutamente nuovi.

Il capitolo XV, che tratta delle deformazioni infinitesime delle superficie, contiene una serie di importanti proposizioni riguardanti il problema della determinazione delle superficie corrispondenti per ortogonalità di elementi ad una superficie data, problema equivalente a quello che forma l'oggetto del capitolo, e di cui a Weingarten spetta il merito di aver data una elegante risoluzione. Il problema delle deformazioni infinitesime poi, trattato dall'A. con un altro metodo (variazione della seconda forma fondamentale), conduce facilmente ai teoremi di Christoffel sulle superficie isotermiche (a linee di curva-

Digitized by Google

tura isoterme). Segue un cenno sulle ricerche di Beltrami e Lecornu relative ai legami tra il detto problema e quello dell' equilibrio delle superficie fiessibili ed inestendibili, pensando le forze sollecitanti esterne e la superficie soggetta alla sola azione di tensioni tangenziali al contorno. L'A. dedica poi alcuni §§ alla teoria del rotolamento di due superficie applicabili, di cui svolge parecchie notevoli conseguenze, e il capitolo si chiude con gli importanti teoremi di Peterson sulle deformazioni *finite* che conservano un sistema coniugato e sulle serie continue di tali deformazioni.

Nel seguente capitolo XVI, l'A., partendo da una elegantissima interpretazione geometrica del teorema di Moutard relativo alle equazioni della forma:

$$\frac{d^2\theta}{du\,dv} = M\,\theta\,,$$

da cui fa derivare la proprietà fondamentale delle congruenze W (sulle cui falde focali si corrispondono le assintotiche), mette in relazione questa teoria con quella del precedente capitolo, e notevoli sono, tra l' altro, la deduzione dei teoremi di Weingarten sulle evolute delle superficie W e i bei risultati di Darboux su una classe particolare di superficie W e sulle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione. Segue un teorema sull' applicazione successiva della trasformazione di Moutard, che fornisce, interpretato geometricamente per mezzo delle congruenze W, degli interessanti risultati. Lo studio delle congruenze W a falde focali di ugual curvatura, conduce alle superficie la cui curvatura, espressa per i parametri u e v delle linee assintotiche, ha la forma speciale

$$-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}\,;$$

per queste esiste un processo di trasformazione che da una particolare nota fa passare ad infinite altre, e l'A. dimostra che per queste trasformazioni vale un bel teorema di *permutabilità*. Infine egli chiude il capitolo dimostrando il legame che vincola queste superficie con quelle che ammettono una deformazione continua che conserva un sistema coniugato.

Il seguente capitolo XVII tratta della deformazione delle congruenze rettilinee e degli inviluppi di ∞^2 di sfere. Deformare una congruenza, secondo Beltrami, significa flettere la superficie (di partenza) da cui sono spiccati i raggi che la costituiscono in modo che ogni punto trasporti seco il suo raggio pensato invariabilmente unito al piano tangente. Orbene, se la congruenza supposta ammette superficie ortogonali, una qualunque di queste incontra gli ∞^2 raggi nei punti di una

Digitized by Google

delle due falde dell'inviluppo del sistema delle ∞^2 sfere aventi i loro centri sui punti della superficie di partenza della congruenza e per raggi la distanza di questi dal punto d'incontro del rispettivo raggio della congruenza colla superficie ortogonale. L'altra falda è costituita nello stesso modo rispetto alla congruenza *riflessa* della data sulla superficie di partenza. Se ci si propone il problema di ricercare quando una falda dell'inviluppo di sfere può mantenere i suoi raggi principali di curvatura legati da una relazione $f(r_1, r_2) = o$ fissa comunque si fletta la superficie di partenza, si cade necessariamente in alcuni casi ben determinati i quali conducono ai bei teoremi di Guichard sulla deformazione delle quadriche di rotazione. Questi sono i principali risultati esposti in questo capitolo, il quale si chiude colla dimostrazione di una notevole proprietà delle due falde di un inviluppo di sfere, quando queste sono contigue, per trasformazione di Montard, ad una stessa superficie.

L'A., nel capitolo successivo, tratta dei sistemi ciclici. Premessi i bei teoremi di Ribaucour sulle congruenze (sistemi ∞^2) di curve piane dotate di superficie ortogonali, dà le formole generali pei sistemi ciclici, cioè quei sistemi ∞^2 di circoli ortogonali ad ∞^1 superficie. Il problema della determinazione di quei particolari sistemi ciclici i cui piani inviluppano una *data* superficie vien posto in stretta relazione col problema della deformazione di questa e precisamente, dato l'elemento lineare di questa, il problema coincide con quello della determinazione di tutte le superficie aventi quell'elemento lineare e giacenti nello spazio a curvatura nulla (ma a ds^2 indefinito):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Seguono alcune considerazioni sui sistemi ciclici normali a una data superficie e su quelli a raggio costante. Un nuovo modo di trattazione del problema permette all'A. di metterlo in semplice relazione con quello della ricerca delle superficie aventi a comune con una data l'imagine sferica delle linee di curvatura e di trattare rapidamente i casi particolari dei sistemi ciclici normali a un piano o ad una sfera. Egli dimostra poi che le superficie ortogonali a un sistema ciclico appartengono a un sistema triplo ortogonale; e l'ultima parte del capitolo è dedicata allo studio delle congruenze rettilinee formate dagli assi di un sistema ciclico e dei legami di questi con quello. Finalmente un ultimo teorema identifica la teoria dei sistemi ciclici con quella degli inviluppi di sfere sulle cui falde si corrispondono le linee di curvatura.

I due seguenti capitoli (XIX e XX) sono dedicati alla esposizione di un nuovo metodo, dovuto a Weingarten, per trattare il problema dell'applicabilità delle superficie, metodo che, secondo le osservazioni di

Digitized by Google

Darboux, si collega colla teoria delle deformazioni delle congruenze. Il metodo, analogamente a quello di Darboux, di cui si è fatto parola nel cap. VII, riconduce il problema a quello dell' integrazione di una equazione a derivate parziali del 2.° ordine, ma la differenza sostanziale tra le due equazioni sta in questo che, mentre l' equazione di Darboux non si sa integrare mai, quella di Weingarten conduce invece rapidamente alla conoscenza delle classi di superficie applicabili già note per via geometrica, mettendo in luce la circostanza analitica a cui si deve veramente il successo in quei casi, ed inoltre ha fatto scoprire nuove classi complete di superficie applicabili che prima non erano affatto note. Il medesimo metodo serve utilmente per la ricerca di proprietà geometriche delle superficie di dato elemento lineare; e l'A. riporta i bei teoremi di Weingarten sulle deformate delle superficie di rotazione e delle superficie a curvatura costante.

L' intimo nesso tra la teoria della deformazione di una superficie e quella dei sistemi ciclici i cui piani inviluppano la superficie stessa, trova una bella applicazione nei §§ seguenti, specialmente dedicati allo studio delle superficie le cui curvature totale e media sono legate da una relazione lineare e dei particolari sistemi ciclici ad esse ortogonali. Un caso particolare conduce all' inversione dei teoremi di Guichard, da cui deriva un metodo di trasformazione per le superficie a curvatura costante. — Il capitolo XX termina con una applicazione del metodo di Weingarten agli spazi ellittico ed iperbolico.

Segue un capitolo dedicato allo studio e alla determinazione delle superficie con un sistema di linee di curvatura piane o sferiche. Una prima classe, perfettamente nota per la elegante costruzione geometrica di Darboux, è quella delle superficie nelle quali le linee di curvatura di ambedue i sistemi sono piane. Il problema generale della determinazione delle superficie con un solo sistema di linee di curvatura piane, si risolve per quadrature, quando però si sappia nel modo più generale riferire la sfera a un doppio sistema ortogonale, di cui le linee di un sistema sono circoli. I §§ seguenti trattano esauriente-mente alcuni casi particolari notevoli, cioè delle superficie modanate generali, delle superficie di Joachimsthal (le cui linee di curvatura di un sistema sono in piani per una retta), delle superficie aventi circolari le linee di curvatura di un sistema, e di quelle (ciclide di Dupin) per le quali sono circoli anche le linee di curvatura dell' altro sistema. — Segue la dimostrazione del bel teorema di Ribaucour relativo alla deformazione della sviluppabile inviluppo dei piani delle linee di curvatura di un sistema di una superficie appartenente alla classe che forma oggetto del capitolo. L'A. mostra poi in due casi particolari (superficie d' area minima e superficie a curvatura costante) come si possa procedere alla determinazione delle funzioni arbitrarie

Digitized by Google

introdotte nella trattazione generale del problema, in guisa da adattarlo ad una classe di superficie fissata a priori. Gli ultimi §§ sono dedicati allo studio delle superficie aventi sferiche le linee di curvatura di un sistema e alla riduzione di questo problema all'altro trattato prima in cui le linee di curvatura sono piane.

I capitoli XXII e XXIII, corrispondenti ai XIV e XV della edizione antica, contengono una esposizione abbastanza estesa della importante teoria delle superficie minime. Il primo dei due capitoli tratta della teoria generale di queste superficie, di cui l'A. dà le equazioni in termini finiti colle formole di Weierstrass e quelle di Schwarz e ne sviluppa le numerose conseguenze. Lo studio delle superficie minime messo in relazione con quello delle superficie applicabili sul paraboloide di rotazione (teorema di Guichard) conduce l'A. a parlare delle congruenze di Thybaut (le cui falde focali sono superficie minime) e il capitolo termina con un cenno sulle superficie minime in geometria ellittica ed iperbolica. L'altro capitolo tratta del problema di Plateau in generale, cioè della determinazione di un pezzo continuo di superficie minima terminata ad un contorno prefissato e vi si trovano sviluppati per disteso i risultati relativi al caso che il contorno dato sia il quadrilatero sghembo formato da due coppie di spigoli opposti di un tetraedro regolare (superficie di Schwarz). Da ultimo l'A. espone la parte fondamentale delle importanti ricerche di Schwarz sulla variazione seconda dell'area di un pezzo di superficie minima.

Il seguente capitolo XXIV è dedicato alla teoria della trasformazione delle superficie a curvatura costante negativa. Esposti brevemente i teoremi atti ad assicurare l'esistenza di una superficie pseudosferica soddisfacente a date condizioni iniziali, l'A. tratta successivamente dei metodi di *trasformazione* di tali superficie, mediante i quali da una nota si arriva, mediante semplici procedimenti geometrici, alla conoscenza di infinite altre. Tali sono la trasformazione complementare e la trasformazione di Bäcklund che comprende quelle come caso particolare, alla quale connette lo studio del così detto problema di Tchebychef, di *rivestire* cioè una data superficie (segnare su di essa un doppio sistema di linee che la dividono in parallelogrammi infinitesimi). L'applicazione successiva di due trasformazioni di Bäcklund gode di una proprietà espressa dal *teorema di permutabilità* tanto fecondo di conseguenze per l'applicazione successiva e illimitata della trasformazione in discorso. I §§ seguenti sono dedicati allo studio di alcuni casi particolari, e da ultimo l'A. tratta della trasformazione di Lie e del suo nesso con quella di Bäcklund.

Nel capitolo successivo l'A., esposti rapidamente i pochi risultati noti, per opera di Bonnet e di Hazzidakis, sulla trasformazione delle su-

Digitized by Google

perficie a curvatura costante positiva, passa ad esporre le importanti sue ricerche, che lo hanno condotto a raggiungere per queste superficie uno sviluppo pari a quello che gia da tempo aveva raggiunto la teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche. L'osservazione semplice, ma fondamentale, da cui egli parte è questa: che mediante *composizione* di due trasformazioni di Bäcklund immaginarie convenienti si può arrivare a una superficie reale. Questa osservazione, estesa alle superficie a curvatura costante positiva, lo conduce a fondare per queste una teoria altrettanto feconda quanto quella di Bäcklund per le superficie pseudosferiche, e che procede affatto parallelamente a questa.

Gli ultimi due capitoli dell'opera, corrispondenti ai tre ultimi dell'antica edizione, riproducono in sostanza gli sviluppi contenuti in questi relativi ai sistemi tripli ortogonali dello spazio euclideo. Il capitolo XXVI contiene in una prima parte i principî e le formole fondamentali della teoria generale dei sistemi tripli ortogonali, e della importante trasformazione di Combescure, nella seconda l'applicazione al sistema delle quadriche confocali e l'esposizione dei bei teoremi di Joachimsthal, Roberts e Hart sulle geodetiche dell'ellissoide. Il capitolo XXVII studia in modo speciale le famiglie di Lamé (famiglie appartenenti a un sistema triplo ortogonale) composte di superficie a curvatura costante, ed a queste famiglie estende i metodi di trasformazione (di Bäcklund) impiegati nei capitoli XXIV e XXV per le superficie isolate a curvatura costante. I risultati a cui perviene completano così i corrispondenti dell'ultimo capitolo dell'antica edizione, inquantochè essi riguardano anche le famiglie di superficie a curvatura costante positiva, laddove quelli erano soltanto relativi a famiglie di superficie pseudosferiche. Il capitolo termina collo studio dei sistemi di Weingarten (pei quali cioè la curvatura costante delle singole superficie della famiglia è la stessa per tutte le superficie della famiglia) e delle loro trasformazioni.

Il merito dell'opera del Bianchi è senza dubbio immenso e indiscutibile, solo che si pensi alla gran quantità e varietà di argomenti trattati e di risultati in essa riportati, il tutto esposto in modo facile, chiaro e piano, e, quel che più importa, tutta l'opera essendo informata ad un unico metodo, che, per quanto non sembri il più potente ai geometri delle altre Scuole, ha certamente il gran pregio di essere il più spontaneo e il più intuitivo.

Si potrà forse osservare che la divisione dell'opera in due volumi non corrisponde pienamente alle intenzioni dell'Autore, e quindi l'ordinamento della materia può non sembrare qualche volta il più opportuno, ma sono queste piccolissime mende assai facilmente scusabili data la immensa quantità di materia, e che passano assolutamente

Digitized by Google

inosservate allo studioso che nell' aureo libro del Bianchi riconosce un preziosissimo contributo e un valido aiuto per lo studio della Geometria Differenziale.

CESARE RIMINI.

GIOVANNI SCHIAPARELLI. — *L'Astronomia nell'Antico Testamento.* — Manuali Hoepli — Serie Scientifica, n. 332 —. Milano, 1903. Pag. VIII-196.

« Nessuno potrà meravigliarsi che l'Astronomia presso gli Ebrei » sia rimasta press'a poco in quel medesimo stadio, che sappiamo » esser stato raggiunto (e talvolta sorpassato in qualche caso) da pa- » recchie nazioni barbare dell'America e della Polinesia ».

Far seguire a siffatta esplicita asserzione, comprovata in vario modo, un volume, piccolo sì di mole, ma denso di notizie e di concetti, attrarre intorno ad un argomento così evanescente l' attenzione e la curiosità dei lettori, suscitare insieme il diletto per una lettura facile e piacevole, e la meditazione per una serie di riflessioni elevate e sagaci, accumulare senza ostentazione le più erudite citazioni e le idee più originali, era impresa degna dell' alta mente e della vasta dottrina di Giovanni Schiaparelli.

Ciò che più colpisce nello studio della nuova investigazione storica e critica da lui pubblicata è la serenità di giudizio, che gli permette di vedere e di additare le ragioni per le quali Israele non seppe sollevarsi nell'Astronomia — e in generale « nel campo delle concezioni e delle speculazioni scientifiche » — all' altezza raggiunta dai suoi vicini del Nilo e dell' Eufrate. Un puro astronomo, non educato da studi estesi e profondi a grande versatilità e larghezza di vedute, avrebbe senz' altro considerato l' inferiorità astronomica degli Ebrei come prova di inferiorità assoluta del loro pensiero e della loro cultura.

Non così lo Schiaparelli, il quale va amorosamente cercando e nelle pagine della Bibbia, e nelle ricerche esegetiche dei commentatori antichi e moderni, ogni indizio della nobiltà intellettuale e morale di quel popolo, alieno certamente dal dedicarsi ad una sistematica osservazione dei fenomeni, ma non dal trasfondere ne' suoi canti la sublime poesia del creato, nè dall' apprezzare la conoscenza delle leggi del cielo. Questa, in Salomone e negli altri sapienti, era considerata più come un dono speciale di Dio, che come frutto di intensa applicazione della mente e di indagine esteriore: ma se tale atteggiamento dello spirito nazionale non era favorevole al diffondersi dei metodi positivi di ricerca, giovava d' altra parte a sviluppare quella grandiosità di concezione monoteista della natura, nella quale, come

Digitized by Google

ben dice il nostro autore, « Israele visse, sofferse, ed esaurì tutto sè stesso ».

Molte citazioni bibliche suffragano queste vedute dello Schiaparelli intorno alla stima nella quale erano tenuti gli uomini, che nella loro sapienza e dottrina portavano un riflesso della speciale ispirazione di Dio; e insieme egli ci addita i punti nei quali la poesia della natura presso gli Ebrei, « riflessione del monoteismo », secondo le belle parole di Alessandro Humboldt, « abbraccia sempre il mondo come » una imponente unità, in cui sono insieme compresi il corpo della » terra e gli spazi luminosi del cielo ». Tra gli squarci nei quali siffatta poesia rifulge, nessuno è forse più efficace dei capitoli XXXVIII e XXXIX del libro di Giobbe, che l' autore riporta integralmente.

Passando dall' ammirazione estetica all' indagine critica, l' autore si appoggia confidente alla teoria di Reuss e di Graf, alla quale si son venuti accostando negli ultimi tempi gli studiosi più autorevoli, come il Kuenen e il Wellhausen. Ritiene con questi dotti uomini che » la composizione del Pentateuco, lunge dall' esser contemporanea alla » immaginazione del popolo d' Israele dall' Egitto nella terra di Ca- » naan, appartiene anzi agli ultimi tempi dell' ebraismo biblico, e » ne forma per così dire l' ultima e più completa fioritura. Esso appare » come una compilazione di materia religiosa, storica e legislativa » appartenente ad epoche diversissime, da Mosè fin dopo Esdra... ».

Questa solida base gli permette di analizzare partitamente le concezioni del popolo d' Israele intorno al firmamento, alla terra, agli abissi, riproducendone lo schema complessivo in una figura annessa al capitolo primo. Nel capitolo successivo esamina le opinioni intorno al Sole e alla Luna, fermandosi ai noti accenni della Bibbia all' arresto del primo astro: e mostra come, pur conoscendo le eclissi, gli Ebrei non seppero spiegarne la causa.

Mostrata dottamente l'origine delle « milizie del cielo » da una consimile frase babilonese, identifica i pianeti Venere e Saturno con due astri citati nei libri di Isaia e di Amos: meno sicura è l' assimilazione a divinità babilonesi planetarie di due altri astri, che dovrebbero corrispondere ancora a Venere ed a Giove. Non mancano accenni a comete, bolidi e piogge di meteoriti. La sede poi di tutti i fenomeni celesti appare in un *cielo astronomico superiore,* che sovrasta e s' avvolge intorno d'ogni parte alla terra e al firmamento, o *cielo meteorologico inferiore,* considerato come un complemento dell' edifizio terrestre.

Il quarto capitolo ricostruisce l' imperfetta uranografia degli Ebrei, ammettendo le innumerevoli difficoltà di un' identificazione sicura degli asterismi citati nella Bibbia con le costellazioni odierne, tali da far credere a Federico Delitzsch che un' interpretazione decisiva

Digitized by Google

debba rinviarsi all' epoca in cui i nomi di stelle trovati nei monumenti assiro-babilonesi potranno chiamarsi in aiuto per la risoluzione dei dubbi. Senza attendere il momento vaticinato dall' insigne orientalista, il nostro non sembra molto propenso a rischiarare *Bibel* con *Babel*, e preferisce la via maestra dei raffronti filosofico-astronomici, dove la sua sagace abilità non ha rivali. Così egli identifica secondo ogni probabilità la *'esch*, o stella del fuoco, con Aldebaran, *i figli della 'esch* con le Hyadi, *Kesil* con Orione, *Kimah* con le Pleiadi, *chadrè theman*, i *penetrali dell'Austro*, con la regione brillantissima del cielo compresa tra Canopo e Alfa Centauri, chiamata già dall' Humboldt *la gioia del cielo australe*. Particolarmente ingegnosa e convincente è l' ipotesi che assimila *mezarìm* ad una « costellazione del ventilabro », o meglio « dei ventilabri » (*mizrìm*, plurale di *mizreh*, in Giobbe XXXVII, 9), sotto il quale nome gli Ebrei avrebbero conosciuto l' una e l' altra Orsa, imparando forse la minore, meno distinta, dai Fenici, che se ne servivano in mare per trovare la direzione del Nord.

Alla discussione delle opinioni discordanti intorno al significato della parola *Mazzaroth* è dedicato un intero capitolo (il quinto): lo Schiaparelli accede con copia di argomentazioni serrate all' ipotesi che si tratti di Venere, e mostra la derivazione di questo cencetto dal culto di Istar presso i Babilonesi.

Lo stato rudimentale dell'Astronomia tra gli Ebrei è provato dalla imperfezione dei loro mezzi di calcolare il tempo. Come lo Schiaparelli dimostra, nella divisione del giorno si seguirono metodi affatto grossolani, mancando il concetto di ore uguali, che forse entrò in seguito alla cattività di Babilonia, essendo oggi noto dalle iscrizioni cuneiformi decifrate a Ninive, che in epoca remota colà si usava dividere il *nychthemeron* in dodici *kaspu*, ciascuno dei quali corrisponde a due delle nostre ore equinoziali. Certo è, che ai tempi di Cristo avevano adottato per la notte le quattro vigilie dei Romani, e che dividevano, sull' esempio dei Greci, l'intervallo tra il levare e il tramonto del sole in dodici parti eguali (*ore temporarie*) variabili in durata secondo le stagioni, come usa ancora tra noi la liturgia ecclesiastica.

Il computo dei mesi e il calendario delle feste presso gli Ebrei fu in ogni tempo, ed ancora presentemente, è regolato sul corso della Luna. Il principio del mese era determinato dall' osservazione della falce lunare subito dopo il novilunio nel crescupolo vespertino, e dava luogo alla celebrazione di una festa speciale. Come la Luna serviva a determinare i mesi, così il Sole determinava la durata e successione degli anni, che erano quindi *solari*, e non vaghi, perchè determinati dal corso delle stagioni e dal rinnovarsi dei lavori agricoli.

Digitized by Google

Nel Primo Codice, che rappresenta lo stadio più antico a noi noto nella legislazione Mosaica, il principio dell'anno è collocato in autunno, depo finite le raccolte. In epoca più recente si è trasportato alla primavera, come con prove diverse abilmente raggruppate dimostra lo Schiaparelli. Egli considera « come assai verisimile. che il » trasporto del principio dell'anno dall'autunno alla primavera abbia » avuto luogo all'epoca di Salomone », non quindi come importazione da Babilonia, secondo un'altra ipotesi diffusa tra i dotti. Il medesimo tempo è assegnato all'abolizione dei nomi dei mesi, che gli Ebrei avevano comuni con i Cananei ed i Fenici, ed alla sostituzione degli ordinali da I a XII, incominciando dal mese della Pasqua, inseparabile dalla primavera.

Il problema di accordare il computo dei mesi con quello degli anni, che esercitò l'ingegno degli astronomi babilonesi e greci, dev'essere stato risolto dagli Ebrei con intercalazioni occasionali, basate sopra le ricorrenze agricole più elementari, come il nostro autore congettura in modo plausibile, mostrando che le basi astronomiche di un vero calendario non furono poste che nella prima metà del secolo III da Rabbi Samuel e Rabbi Adda, eredi forse della morente astronomia babilonese, od allievi dei Greci.

Un capitolo dedicato ai periodi settenari chiude il volume. Ricorda fra le più antiche istituzioni ebraiche quella della settimana e del riposo al Sabbato, aggiungendo con fine allusione di evidente opportunità: « Portato dagli Ebrei in tutto il mondo nella loro disper- » sione, adottato dagli astrologhi Caldei per uso delle loro divina- » zioni, accolto dal Cristianesimo e dall'Islamismo, questo ciclo così » comodo e così utile per la cronologia ormai è adottato in tutto il » mondo. Il suo uso si può rintracciare fino a quasi 3000 anni ad- » dietro, e tutto fa credere che durerà nei secoli avvenire, resistendo » alla smania di novità inutili, ed agli assalti degli iconoclasti pre- » senti e futuri ».

Presso gli Ebrei mancavano quasi certamante i nomi dei giorni della settimana, all'infuori del Sabbato: e non pare neppure che essi conoscessero le corrispondenze tra i giorni stessi ed i sette astri erranti, dovute forse agli astrologhi della Grecia. Certo è che l'ordine dei giorni nel ciclo settendiale rimase inalterato ancor quando i Cristiani sostituirone al Sabbato come giorno di festa il « giorno del Sole » o « del Signore » — *dies Dominica.* — Così « la settimana è di- » ventata un filo d'oro, che serve molte volte a guidare lo storico » nelle incertezze della Cronologia ».

Parallela all'istituzione del ciclo di sette giorni sembra essere stata quella del ciclo di sette anni, applicato al *riposo della terra,* alla liberazione degli schiavi ebrei, alla remissione dei debiti. Ricostruendo

Digitized by Google

su alcuni accenni la data di anni sabbatici determinati da fatti storicamente accennati, lo Schiaparelli trova che, durante tutto il tempo compreso fra la rivolta dei Macabei e la distruzione di Gerusalemme (e forse anche prima), il principio degli anni sabbatici ha avuto luogo negli anni $7n + 3$ avanti Cristo e $7n + 5$ dopo Cristo.

Come abbiano accordato gli Ebrei la « settimana d'anni » con il periodo giubilare di cinquant'anni, disponendo dell'anno restante dopo sette cicli di sette anni, è ancora oggetto di discussione. Il nostro autore espone l'opinione dell'Ewald, quella di Mosè Maimonide, e le altre molteplici, che eludono la difficoltà riducendo il ciclo giubilare a 49 anni soltanto; ma non si pronunzia, osservando che le due prescrizioni inconciliabili della Legge si riferiscono sicuramente ad epoche diverse. Ad ogni modo, nei cicli di sette anni e loro multipli non vede alcun riflesso di fatti astronomici, ma semplicemente l'effetto del significato particolare attribuito misticamente dagli Ebrei (e non dagli Ebrei soltanto) al numero sette.

FRANCESCO PORRO.

G. A. MAGGI. *Principii di Stereodinamica. — Corso sulla formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del movimento dei solidi*, p. XI + 262 [Prezzo L. 7,50]. U. Hoepli, Milano, 1903.

Son già alcuni anni, il Prof. Maggi ha tratteggiato, in un libro universalmente apprezzato, una nuova esposizione, in parte originale, dei principii del movimento dei corpi (v. *Bollettino* I, 1898, p. 8). In questo, per la natura delle questioni trattate, non hanno potuto trovar posto alcune altre teorie non meno fondamentali, e delle quali anche indagini recentissime hanno mostrato l'importanza (1), ma che in un primo studio è bene tralasciare.

Il nuovo libro del Prof. Maggi è non solo un seguito naturale ed indispensabile del primo, e ciò basterebbe già a giustificarne l'opportunità; ma ne è ancora un complemento modernamente inteso e la cui lettura, vuoi per la varietà degli argomenti e dei problemi particolari trattati, vuoi per la esposizione rigorosa e originale di teorie anche ben note, è piacevole e ad un tempo istruttiva.

Stabilite le basi scientifiche al secolo XVII, due momenti culminanti presenta lo sviluppo storico della dinamica negli ultimi due secoli. Il primo e forse più importante è segnalato dalla scoperta del principio di d'Alembert e da quella dei metodi della meccanica ana-

(1) ROUTH. *Advanced Rigid Dynamics*. 1884.

Digitized by Google

litica di Lagrange; metodi generali, di un'ampiezza e fecondità non ancora esaurita e che riguardano la ricerca delle equazioni generali della dinamica; il secondo invece è segnalato dalla scoperta del principio di Hamilton che è l'origine dei metodi classici per la integrazione delle equazioni suddette.

I principii di stereodinamica, divisi in tre capitoli che si intitolano appunto dai nomi di d'Alembert e Lagrange, di Hamilton e Jacobi, trattano, per il caso dei corpi solidi, dei metodi per la formazione, l'interpretazione e l'integrazione delle equazioni del moto.

Richiamati alcuni dei più fondamentali e noti risultati relativi al moto rigido; stabilito il principio che i vincoli da considerarsi sono traducibili con un sistema di equazioni ai differenziali totali, illimitatamente integrabile o no (donde segue la distinzione tra sistemi olonomi ed anolonomi); stabilito ancora che tal sistema può sempre ridursi lineare rispetto alle coordinate degli atti di movimento dei varii pezzi rigidi; l'A. passa a considerare, con grande generalità, alcuni esempii in cui è semplice tradurre ed interpretare cinematicamente la condizione del vincolo. Tra questi è classico il moto di un corpo rigido vincolato a rotolare senza strisciare sopra un piano fisso o in moto prestabilito (moto puro di rotolamento) e che offre un esempio di sistema anolonomo.

L'A. definisce *atto di movimento virtuale*, ad un istante qualunque, ogni atto di movimento le cui caratteristiche soddisfacciano alle stesse equazioni differenziali rese omogenee; e però, secondo che i vincoli sono indipendenti o dipendenti dal tempo, gli atti di movimento virtuale ed effettivo sono compatibili cogli stessi vincoli stabiliti ad *ogni istante*, oppure fissati nella loro condizione allo istante considerato.

Se k è il grado di libertà del sistema, esistono infiniti insiemi di k atti di movimento virtuale tra loro linearmente indipendenti (fondamentali) e per cui mezzo si può comporre ogni altro atto di movimento virtuale.

Ciò premesso e stabilito che ad ogni specie di vincoli corrisponda un sistema di pressioni applicate al sistema di corpi rigidi (*postulato delle pressioni*), i principii fondamentali del moto, racchiusi sostanzialmente nella seconda legge di Newton, si traducono subito nelle equazioni del moto del sistema di corpi rigidi, e in cui naturalmente figurano le coordinate delle pressioni.

La deduzione del principio di d'Alembert e la conseguente equazione fondamentale della dinamica, nella sua forma classica, sono subordinate ad un nuovo *postulato*, cioè che il lavoro (potenza complessiva) delle pressioni vincolari sia nullo per ogni atto di movimento virtuale.

Infatti l'A., che segue sempre il concetto di subordinare la statica

Digitized by Google

alla dinamica, non solo non può valersi del principio dei lavori virtuali, ma eleva contro la dimostrazione classica del d'Alembert, come è riportata in tutti i trattati, una obiezione. Tale dimostrazione infatti tacitamente suppone equivalenti due sistemi di forze nello stato di equilibrio e nello stato di moto; ciò che giustamente all'A. non sembra nè di prima evidenza, nè conseguenza dei soliti postulati. Il principio dei lavori virtuali scaturisce invece dal principio suddetto, pel caso degli spostamenti invertibili, per usare la nomenclatura più comunemente usata, e quindi come *sola condizione necessaria di equilibrio*. Un tale procedimento, in sostanza già delineato dal Kirchhoff, è senza dubbio rigoroso; ed è ben vero che uno stesso principio serve pel caso del moto e dell'equilibrio; ma in fondo anche se (come del resto è già stato da altri espresso) (1), il famoso principio di d'Alembert è un postulato, la vecchia maniera di giustificarlo è sempre molto espressiva.

È ben vero poi che noi non possediamo una dimostrazione rigorosa e generale del principio dei lavori virtuali, e le considerazioni che si usano esporre nei corsi non riguardano che una serie più o meno generale di casi speciali e pei quali, ammesso sempre il postulato delle pressioni vincolari, riesce però agevole e coi soli principii e postulati della statica accertare la validità del principio, completato colla considerazione degli spostamenti non invertibili. Ora io non credo siano fuor di luogo o superflue queste considerazioni introduttorie che legittimano nel modo più naturale e spontaneo la posizione del principio generale, anche, se si vuole, come postulato. E lo stesso dicasi per il principio di d'Alembert.

Applicando l'equazione di Lagrange ad un sistema di atti fondamentali si ottengono le così dette equazioni pure del moto; delle quali sono mostrate le applicazioni alle questioni più interessanti della dinamica; tra queste notiamo per la semplicità, eleganza, chiarezza di esposizione sopratutto quella del moto di un giroscopio (movimento polare) per inerzia, per gravità; quella della bicicletta, ecc.

Il teorema di Hamilton, cui è dedicata la seconda parte, esige, com'è noto, la considerazione di certe variazioni di funzioni delle coordinate di un sistema, che quindi occorre precisare nettamente. Le equazioni traducenti i vincoli di un sistema, nel caso più generale, sono lineari rispetto alle derivate totali delle coordinate; ma mancano se il sistema è olonomo e le coordinate sono libere. L'operatore δ applicato alle coordinate dà luogo: nel primo caso a funzioni regolari del tempo e che soddisfano alle suddette equazioni rese omogenee, e

(1) DUHEM. *L'évolution de la Mécanique*. Revue générale des sciences, t. XIV, p. 125, 1903 — DE FREYCINET. *Sur les principes de la Méc. ration.* 1902, p. 150.

Digitized by Google

però definite a meno di un fattore di proporzionalità; ad altrettante funzioni arbitrarie di t nel secondo caso. Applicato invece alle derivate, rispetto al tempo, viene definito dalla supposta invertibilità delle due operazioni. Di qui è facile passare alla definizione dell'operatore δ applicato ad una funzione delle coordinate e delle loro derivate rispetto al tempo; definizione che è indipendente dalla specie di coordinate.

Tale operatore può quindi pensarsi, nel senso ordinario, come la variazione prima relativa ad un movimento virtuale *sincrono*. Se per esempio, per fissar le idee, si tratta di un sistema olonomo, i valori η_i delle coordinate libere e i valori $\eta + \varepsilon\eta$ al tempo t individuano, col concorso del tempo, rispettivamente una posizione del movimento effettivo ed una posizione diversa assumibile dal sistema per lo stesso tempo t; allora la variazione $\varepsilon\eta$ si dice relativa ad un movimento soggetto agli stessi vincoli e *sincrono* con questo.

Movimento virtuale sincrono ed effettivo soggetti agli stessi vincoli, in generale non coincidono, a meno che il sistema sia olonomo. Mutiamo il movimento virtuale sincrono, in modo che la successione delle sue varie posizioni, corrispondenti collo stesso valore del tempo ad una posizione del moto effettivo, sia riferita ad una successione di valori del tempo diversa dalla precedente, alla quale però tende quando le varie posizioni, virtuale ed effettiva tendono a confondersi; avremo un movimento virtuale corrispondente al valore $t + \Delta t$ del tempo e che dicesi *asincrono* all'effettivo. A questo corrisponde una variazione prima δ^* che costituisce, a sua volta, un nuovo operatore; il quale applicato ad una funzione delle coordinate e delle derivate non è in generale indipendente dalla scelta delle coordinate stesse, a meno che le derivate vi compariscano omogeneamente.

Le considerazioni, alquanto minute, relative a questi operatori trovano la loro ragion d'essere nel fatto notevolissimo che, applicate all'equazione di Lagrange e di d'Alembert, il cui significato formale è indipendente da qualunque interpretazione che si attribuisca all'operatore stesso, conducono immediatamente e semplicemente ai famosi teoremi dell'azione stazionaria, della minima azione e del minimo sforzo; i quali, per tal mezzo, ricevono una esatta e semplice significazione. Così p. e. il primo è relativo al confronto dell'azione nel movimento effettivo, col suo valore in un movimento qualsivoglia sincrono avente col primo a comune le posizioni estreme.

L'applicazione di questi principii al moto di un punto per inerzia, con vincoli indipendenti dal tempo, conduce, tra gli altri, al concetto di « *direttissima* » e quindi l'A. molto opportunamente, sebbene fugacemente, accenna ai principii che informano la meccanica di Hertz. Un'altra applicazione si ha nella ricerca delle equazioni del moto di

Digitized by Google

un corpo solido libero o del moto di un qualunque sistema anche anolonomo, dovute allo stesso A. e che si presentano sotto una forma analoga alla 2.ª di Lagrange; nelle equazioni di Appell; nel giroscopio di Foucault; nel moto di un cerchio che rotola su di un piano fisso, oggetto di studio recente del sig. Carvallo ecc. (1).

Nella 3.ª ed ultima parte finalmente, la più breve perchè di dominio dell'analisi pura, l'A., limitandosi ai sistemi olonomi, dipendenti o no dal tempo, dopo aver data la forma canonica delle equazioni del moto, dimostra il teorema di Jacobi insistendo su alcuni particolari di solito trascurati; il quale è poi solamente applicato al moto a due dimensioni nel caso delle coordinate bipolari; il teorema di Poisson che dà luce sul successo dei casi di integrazione del moto polare, ecc.

Una breve discussione sull'ultimo moltiplicatore chiude il libro.

Questo, in piccol volume, racchiude una messe svariata di risultati, di ricerche e di vedute originali e viene degnamente a prender posto onorevole nella moderna biblioteca scientifica italiana.

Spartà, settembre 1903.

ROBERTO MARCOLONGO.

E. CZUBER. *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung.* — 2.ª Hälfte, Leipzig, Teubner 1903, pag. XV, 290.

1.° — Il matematico non può usurpare le veci del sociologo, dell'antropologo, dell'economista, del geografo per giudicare della opportunità e del valore a priori di una data ricerca statistica. È invece utilmente impiegata l'opera sua per stabilire, a posteriori, il valore dei risultati che sulle enumerazioni statistiche si appoggiano.

Senza dubbio uno studioso, dotato di scrupolosa coscienza scientifica e di non comune finezza logica, ha, in generale, un'idea abbastanza chiara, benchè non matematicamente formulata, del grado di sicurezza che alle conclusioni, dedotte dai fatti riservati, si può attribuire; ma è pure fuor di dubbio: 1.° che in varie delicate circostanze una tale sicurezza non può ottenersi senza prove matematiche, 2.° che è utile che questo genere di prova serva in certi casi di freno alle conclusioni troppo affrettate, 3.° che è pure nell'interesse del buon nome e della diffusione delle teoriche fondate sui risultati statistici che il pubblico intelligente sappia che vi ha una guarentigia numerica del grado di fiducia che questi risultati meritano.

(1) P. APPEL. *Les mouvements de roulement en dynamique.* Collection Scientia 4. 1899.

Digitized by Google

2.° — Il ragionatore teorico, il quale osservi la apparente irregolarità dei fatti che si assoggettano alla statistica, è indotto facilmente a disperare a priori della possibilità di dedurre da quei fatti dei numeri aventi un valore *fisso* o *tipico*. Ma nella stessa guisa una persona non pratica delle misurazioni fisiche, ragionando sulla impossibilità di realizzare superficie piane e linee rette nella costruzione, poniamo, di una verga metallica, potrebbe a priori pensare che non sia possibile fissare un *numero* il quale misuri la *lunghezza* di essa. L'esperienza dimostra che ripetute serie di comparazioni accurate conducono sistematicamente, in media, a numeri o uguali o differenti per quantità trascurabili; e questa relativa invariabilità della media ci persuade, a posteriori, che la *lunghezza* del pezzo metallico ha un significato fisico ed è suscettibile di misurazione.

Benchè in un campo assai più irregolare e di meno facili conclusioni, l'osservazione dei fatti *statistici* ci dà spesso un modo di convinzione sperimentale dello stesso genere. Quando per due regioni diverse della terra noi consideriamo la media *statura* degli uomini, e, divisa una regione in varie categorie di spazio o di tempo, troviamo per essa delle medie o identiche o pochissimo discordi, e, fatta la ricerca analoga per l'altra regione, troviamo medie pur concordanti fra loro, ma sistematicamente differenti da quella della prima, dobbiamo pur concludere che l'elemento: *statura media* abbia un significato fisico. Quando studiamo per le varie regioni d'Europa, in una data epoca, la mortalità della popolazione alle varie età, e, fatto lo studio analogo per un'epoca, poniamo 50 anni dopo, vediamo che le nuove *curve* di mortalità sono sistematicamente differenti da quelle precedenti, che, p. es., nelle età più giovani e più forti la mortalità è diminuita per modo che sia assicurato alla società l'aiuto di un maggior numero di individui validi, siamo pur indotti a ritenere che abbia un significato lo studio della *curva* di sopravvivenza e che il modo di variare di essa nello spazio e nel tempo abbia un interesse, vuoi come sintomo, vuoi come prodromo, per le condizioni generali della popolazione.

3.° — La 3.ª parte (Mathematische Statistik) del trattato di *Czuber*, della cui prima metà (I und II Theil) abbiamo riferito nel numero Lug. Ago. Sett. del precedente anno, è destinata alle applicazioni del calcolo delle probabilità alla statistica, e si occupa principalmente, nella 1.ª sezione, del giudizio matematico intorno alla esistenza di valori *tipici* sia *intensivi* che *estensivi*. Col primo termine l'A. denota quei numeri astratti che rappresentano rapporti, percentuali o simili (per es. il rapporto fra il numero dei nati maschi e quello delle femmine in una data epoca e regione, oppure il rapporto fra i numeri di morti a date età). *Estensive* sono invece le quantità concrete (come statura media, durata media della vita ecc.).

Digitized by Google

Stabilita l'analogia e la relazione tra i fatti statistici relativi a grandi agglomerazioni umane e i fatti accidentali studiati nel Calcolo delle probabilità, l'A. passa a misurare il grado di precisione di un valore statistico *relativo* o *intensivo* dedotto da un certo numero di prove. Si tratta del caso semplice in cui questo valore misuri il rapporto fra il numero di volte che un certo avvenimento si verifica e il numero totale delle prove; ammesso, naturalmente che la probabilità sia costante nelle varie prove, ossia che a quel rapporto si possa attribuire un valore tipico fisso.

Ma qual'è il criterio per giudicare che, per un dato ordine di fenomeni, vi sia in *rerum natura* un valor tipico unico? La massa dei fatti disponibili venga divisa (nello spazio o nel tempo) in più categorie e da ciascuna categoria si deduca la media. L'*error medio* di ognuna di queste medie può o calcolarsi a priori colle formole date dalla Teorica Bernoulliana, ovvero a posteriori dalle differenze fra le singole medie e la media generale. Quando questi due modi di calcolo danno risultati sensibilmente concordi, vi sarà ragione di credere che le differenze dei singoli dati dalla media possano considerarsi come deviazioni accidentali da un tipo unico (*dispersione normale*). Quando invece col secondo modo si ottenga un error medio maggiore che col primo, ciò indicherà che fra i numeri delle varie categorie vi hanno non solo differenze accidentali, ma ben anche sistematiche, il che vuol dire una di queste due cose, o che per le varie categorie vi hanno valori tipici diversi, ovvero che non vi ha affatto valore tipico unico (*dispersione ultranormale*). Finalmente nel caso inverso, quando cioè fra le medie parziali vi siano differenze più tenui di quello che il grado di precisione calcolato a priori farebbe aspettare, vi sarà ragion di sospettare l'azione di cause *costringenti*, e alla massa di dati non più *liberi* (*ungebundene*) come nei due casi precedenti, riescirà vana l'applicazione del calcolo delle probabilità.

Meno facile è lo studio dei valori *estensivi*, e, generalmente, di quei casi nei quali non si può applicare il metodo aprioristico pel calcolo dell'errore medio (in base alla teoria di Bernoulli). Varî artifizî sono suggeriti dall'A. per giudicare della ammissibilità di un valore tipico in tali casi; e così il verificare se la *media aritmetica* di un gran numero di dati coincida col *valor centrale* e con quello di *frequenza massima*, e se, più che tutto, la distribuzione dei varî dati rispetto alla media corrisponda abbastanza bene alla legge Gaussiana di frequenza degli errori. Bisogna però osservare che tali criterî non sono abbastanza sicuri come *criterî positivi*. Si può infatti dimostrare che, mescolate due masse di dati relativi a due valori tipici diversi, la massa risultante, può, in certi casi, soddisfare ancora sensibilmente a tutte queste condizioni.

Digitized by Google

Delle regole teoriche l' A. fa ampia ed interessante applicazione alla questione del rapporto fra le nascite maschili e le femminili in Prussia e in Austria, fra le morti di maschi o di femmine in Belgio, ai rapporti di mortalità per varie classi di età in Olanda, alla più frequente durata della vita.

4.° — Una intera sezione della III parte che stiamo esaminando si occupa diffusamente della costruzione e dell' uso delle *tavole di sopravvivenza e di mortalità*, e in specie delle varie rappresentazioni grafiche dello stato e del movimento di una popolazione; delle relazioni in che stanno fra loro le tavole dedotte dall' osservazione di un dato numero di *nati in uno stesso anno*, e quelle fornite dai registri dei *contemporaneamente viventi* in una data epoca. I quali due modi di determinazione non danno naturalmente risultati identici altro che nel caso di una popolazione stazionaria. Come possono servire i dati delle Società d' Assicurazione alla costruzione di tavole di mortalità è detto nel N.° 194 e nel successivo N.° si tratta in particolare delle tavole (costruite verso il 1883) sui dati di 23 Società tedesche.

È pure fatta mensione delle *formole* di mortalità di *Gompertz* e di *Makeham*, nonchè della *perequazime* dei dati di sopravvivenza. A proposito del quale argomento, ci sarebbe piaciuto veder citato il bel lavoro di *Schiaparelli* pubblicato nel 1867, nel quale è dato e completamente sviluppato e discusso quel modo di perequazione la cui idea fu pure data, indipendentemente, da *Wittstein* nello stesso anno. La deduzione della probabilità di morte o di invalidità dalle relative tavole forma l' ultimo capitolo di questa 3.ª parte.

5.° — Meno parole dedicheremo alla 4.ª ed ultima parte dell' opera, che riguarda le *assicurazioni sulla vita*, non perchè sia meno pregevole delle altre, chè anzi ci sembra che per la precisione dei concetti e per la esauriente discussione dei varî problemi, questa parte sarà di prezioso aiuto a chiunque vorrà occuparsi di questi argomenti. Ma poichè l' argomento stesso è di carattere piuttosto tecnico e meno pertinente a quelle idee scientifiche generali che interessano i lettori del Bollettino, così ci limiteremo a dare un sommario delle cose trattate.

La 1.ª sezione, stabiliti i concetti fondamentali sugli elementi che fissano il valore di un contratto vitalizio, sull' uso delle tavole di mortalità e sulle correlative indagini mediche, si occupa delle note formole relative all' interesse composto e alle rendite a durata fissa; tratta quindi del valore attuale di un capitale il cui pagamento sarà fatto a una epoca prefissata nel caso di sopravvivenza di un dato individuo. Seguono le formole relative al valore attuale di *rendite vitalizie* anticipate o posticipate, temporanee, differite, costanti o variabili. Interessante (e da non trascurarsi dai pratici sempre desiderosi

Digitized by Google

di semplificare i calcoli a scapito della precisione) il N.° 211 nel quale è paragonato il valore attuale di una rendita vitalizia per una persona di età x, con quella di una egual rendita fissa la cui durata sia eguale alla sopravvivenza media oltre l'età x. Quest'ultima ha un valore attuale sempre *maggiore* di quella.

I N.i 213 e seg. si occupano della *assicurazione* di un capitale da pagarsi in caso di morte; è posta in evidente la relazione semplice fra i numeri delle tavole di assicurazione e quelli delle rendite vitalizie. Seguono le assicurazioni *miste* (per le quali un capitale può, secondo l'evento, esser pagato a un individuo oppure ai suoi eredi) le rendite pagabili *a più rate*, le rendite *sopra più vite* e quelle di *sopravvivenza*. A proposito delle *rendite sopra due vite* è dimostrato il bel teorema di *De Morgan*, che, ammessa la formola di *Gompertz* per la sopravvivenza, riduce il calcolo di una tal sorta di rendita a quello di una vitalizia per un solo individuo fittizio la cui età attuale sia una certa media fra quelle dei due individui considerati.

Le rendite e le assicurazioni dipendenti dalla *invalidità* sono trattate nei N.i 239-242.

6.° — La 2.ª sezione della 4.ª parte tratta della determinazione dei *premi* d'assicurazione, considerati sia per lo scopo principale di pagare il valore attuale della somma assicurata, sia per quello secondario di sopperire alle inevitabili occorrenze di un istituto finanziario. (spese d'Amministrazione, fondi di cassa, utili ecc.).

Nei casi in cui il contratto sia di tal natura da non portare di *necessità* al pagamento di qualche cosa da parte della Società Assicuratrice (come p. es. nel caso di una assicurazione di morte, per un numero *limitato* d'anni) l'assicurato può garantirsi il *rimborso* eventuale dei premi sborsati. Questa è in realtà una assicurazione secondaria il cui prezzo porta, naturalmente, ad un aumento del premio annuo. (N.i 253-256).

7.° — Per la stabilità finanziaria di un Istituto Assicuratore, occorre, com'è chiaro, che per un certo numero d'anni gli incassi siano maggiori degli sborsi probabili; a questo principio debbono essere ispirate tutte le norme relative al modo di pagamento dei premi, e da esso ha origine la così detta *riserva*. Ogni polizza d'assicurazione ha dunque, in ogni momento, un certo valore di riserva, ossia una certa quota di partecipazione al fondo di riserva; il calcolo della quale non è di puro interesse tecnico, ma ha un valor pratico per gli eventuali contratti di *riscatto* della polizza, di semplice *cessazione* nel pagamento dei premi, di *cangiamenti* nei termini dell'assicurazione. A questi argomenti è dedicata la 3.ª sezione.

La 4.ª Sezione finalmente tratta, in base ai principi generali del calcolo delle probabilità, del *rischio matematico* cui il privato e la

Digitized by Google

Società Assicuratrice sono esposti, in dipendenza delle possibili deviazioni degli eventi rispetto a quello che è previsto dalle tavole statistiche assunte a base dei contratti.

Pisa, Dicembre 1903.

P. PIZZETTI.

International Catalogue of Scientific Literature. First annual Issue. A. *Mathematics.* 8.° p. XIV + 201. [Prezzo 15 sh.]. B. *Mechanics.* 8.° p. XIV+128 [Prezzo 10 sh. 6 d.]. London, Harrison and Son, 1902.

Questi due volumi sono le prime testimonianze stampate dell'attuazione della grande impresa collettiva che sullo scorcio del Secolo passato venne architettata per iniziativa della Società Reale di Londra; sono i due volumi della collezione 1902 interessanti i nostri consueti lettori. Ciascuno di essi abbraccia: 1.° Prefazione, indicante lo scopo ed il piano della pubblicazione, ed altri dati concernenti la stessa; 2.° Schema di classificazione in Inglese, Francese, Tedesco ed Italiano (cfr. *Bollettino*, IV, 1901, p. 65 e seg.); 3.° Elenco delle pubblicazioni *per autori* (indice alfabetico); 4.° Elenco delle pubblicazioni *per materie*; 5.° Elenco delle pubblicazioni periodiche di cui venne fatto lo spoglio.

Ogni volume reca due date: una che indica il mese in cui ne venne finita la compilazione, l'altra del mese in cui ne fu finita la stampa. L'entità del materiale adunato risulta dal fatto che i due volumi che annunziamo abbracciano circa 1500 + 950 titoli.

Emerge da queste brevi notizie che i fondamenti di tale pubblicazione internazionale sono tali che questa può soddisfare le esigenze degli studiosi ed è pertanto degna del favore del pubblico; tutti sanno quale e quanta utilità abbia recato e tuttavia rechi il *Catalogue of scientific Papers*, splendida sintesi di tutto il lavoro fatto dagli scienziati che vissero nel Sec. XIX; perciò tutti devono volgersi fiduciosi all'*International Catalogue* che ne rappresenta un notevole perfezionamento, perfezionamento che specialmente risiede in un più ampio sfruttamento di fonti ed in una facilitata consultazione, dovuta all'aggiunto dell'indice per materie.

Chi ritiene utile e perciò desiderabile la diffusione della coltura scientifica deve far voti ed adoperarsi che l'*International Catalogue* si diffonda ampiamente e rapidamente, onde è da augurare che il bilancio economico dell'impresa divenga presto così florido da permettere la vendita dei singoli volumi a prezzi più limitati di quelli in quest'anno adottati.

Al pari di ogni opera umana questa che annunciamo non è perfetta,

Digitized by Google

ma suscettibile di miglioramento; agli studiosi spetta di suggerire i più urgenti ritocchi che essa esige! Intanto noi crediamo di farci interpreti di un desiderio giustificato e diffuso facendo voti che nei volumi successivi di ogni autore venga dato per intero non solo il *cognome*, ma anche il *nome*, fino ad ora indicato con la sola iniziale; così si eviteranno possibili equivoci, gravi quanto quello che consisterebbe nell'attribuire un'opera di Giacomo Bernoulli al fratello Giovanni.

G. L.

NOTIZIE

I PREMI DELL'ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella seduta del 21 Dicembre 1903 vennero fra gli altri conferiti i premi seguenti: *Premio Francoeur* a E. Lemoine, per l'insieme dei suoi lavori geometrici; *Premio Poncelet* a D. Hilbert, per le sue ricerche sui principî della geometria; *Premio Lalande* a M. Campbell per i suoi lavori di spettroscopia stellare ed astronomia fisica; *Premio Valz* a M. Borelly per le sue scoperte di comete ed altri pianeti; *Premio Pontecoulant* a H. Andoyer per le sue ricerche sulla teoria della luna; Premio *Petit d'Ormoys* a J. Hadamard pel compleso delle sue pubblicazioni matematiche; *Premio Binoux* a H. G. Zeuthen per le sue opere storiche.

Pel 1904 i temi proposti dalla stessa Accademia sono:

Gran Premio delle Scienze matematiche. Perfezionare in qualche punto importante lo studio della convergenza delle frazioni continue algebriche.

Premio Bordin. Sviluppare e perfezionare la teoria delle superficie applicabili sul paraboloide di rivoluzione.

Premio Vaillant. Determinare e studiare tutti gli spostamenti di una figura invariabile i cui vari punti descrivono delle curve sferiche.

Nel 1905 scade poi il termine pei lavori dei concorrenti al

Premio Damoiseau. Vi è una decina di comete le cui orbite, durante la loro visibilità, si mostrarono di natura iperbolica. Cercare, risalendo al passato e tenendo conto delle perturbazioni planetarie, se lo stesso accadeva prima dell'entrata di quelle comete nel sistema solare.

* * *

TEMA PROPOSTO DAL POLITECNICO DI MONACO PER L'ANNO 1904. — Di recente l'attenzione dei geometri venne attratta sulla rappresentazione delle curve e superficie mediante le cosidette equazioni *intrinseche*, in cui non entrano elementi estranei alla figura rappresentata

Digitized by Google

(quali sarebbero coordinate e parametri). In particolare G. Scheffers, uniformandosi alle idee di S. Lie, ha definite come *equazioni intrinseche* di una superficie quelle che danno le derivate dei raggi principali di curvatura rispetto agli archi delle sezioni principali in funzione dei raggi stessi. Ora si domanda di stabilire tali equazioni per le superficie generali di 2.° gcado e di dedurne le proprietà principali di queste. (Scadenza 15 Ottobre 1904).

***

UN' OPERA IN PREPARAZIONE. — Il Prof. A. M. Bustelli sta attendendo alla compilazione di un esteso lavoro dal titolo *Primi passi alla filosofia della matematica nel rispetto critico didascalico* a cui il Prof. Cerruti apporrà apposita prefazione. Essa comprenderà otto fascicoli separati, aventi i temi seguenti: 1.° La singolarità e la pluralità. 2.° La grandezza e la quantità. 3.° Lo spazio e l'estensione. 4.° Il tempo e la durata. 5.° Il moto e la velocità. 6.° La materia e la forza. 7.° La materia e la massa. 8.° Gli elementi della matematica e la loro propedeutica. — La stampa verrà cominciata non appena l'autore (Roma, Via della Colonna 41) avrà ricevuto un numero sufficiente di adesioni. Ogni fascicolo, di non meno di 52 pag. in 8.° costerà ai sottoscrittori L. 0,50; finita la stampa essi verranno posti in commercio al prezzo di L. 0,75. Auguriamo che il pubblico matematico non resti sordo all'invito che gli è rivolto dall'egregio professore.

***

MEYER HAMBURGER, che tiene un posto così eminente fra i recenti cultori della teoria delle equazioni differenziali, nacque a Posen il 5 Aprile 1838. Compiuti con somma lode gli studi secondari, si dedicò per breve tempo al commercio librario, per accondiscendere al desiderio del padre, il quale ben sapeva come la fede religiosa a cui era ascritto gli avrebbe impedito di ottenere una eminente posizione ufficiale. Ma poco dopo egli, seguendo l'esempio dei suoi antichi condiscepoli Fuchs e Königsberger, abbandonò i libri mastri per i manuali scientifici e divenne allievo di Weiertrass, che allora era l'astro della Facoltà matematica di Berlino. Gli studi universitari egli finì nell'Aprile 1863, ma soltanto nel 1865 conseguì a Halle la dignità dottorale; però fino dal 1864, per vivere, accettò il posto di maestro nell'Asilo infantile annesso alla Comunità israelitica di Berlino, posto modesto che egli doveva serbare per tutto il resto della sua esistenza. Per merito di Weingarten con decreto del 15 Gennaio 1879 fu autorizzato a tenere lezione nel Politecnico di Berlino e ne profittò sinchè il 3 Giugno 1903 improvvisamente si spense. Oltre alla sua Dissertazione di laurea, scrisse 25 lavori matematici; 13 concernono la teoria

Digitized by Google

delle equazioni differenziali ordinarie, 7 quelle lineari, 4 le soluzioni singolari ed uno lo sviluppo delle funzioni in serie. Per completare il quadro della sua attività, aggiungeremo il ricordo di una memoria sulla formola di Gauss per determinare l'epoca della Pasqua e di due notevoli lavori filosofici (1).

* * *

Esposizione di modelli di matematica. — Gli oggetti destinati all'esposizione di modelli che verrà fatta in occasione del prossimo Congresso internazionale dei matematici (8-13 Agosto 1904) devono essere segnalati al Prof. R. Mehmke (Stuttgart, Weissenburgstr. 29) o al Prof. M. Disteli (Strassburg, Vogesenstr. 10), e spediti fra il 15 Giugno ed il 15 Luglio all'indirizzo seguente: *Speditionsfirma J. Kratzers, Heidelberg, Bahnhofstrasse 7*, accompagnati dall'indicazione del loro valore e dalla dichiarazione di essere gli oggetti stessi *destinati alla esposizione del Congresso di matematica.* Sarebbe desiberabile che anche l'Italia partecipasse a siffatta mostra; ad es. non sarebbe possibile rintracciare ed inviare quel modello di superficie pseudosferica costruito dal Beltrami nell'epoca in cui elaborava il suo celebre *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea?*

* * *

Una nuova collezione di modelli di geometria. — La celebre Casa Brill-Schilling, la quale aveva sinora il monopolio dei modelli di matematiche superiori, si vede sorgere un serio rivale in A. W. Gay di Darmstadt, che assunse la confezione e pubblicazione dei modelli originali, che da tempo va costruendo il Prof. H. Wiener.

Di tali modelli vennero pubblicate le prime *cinque serie* (I. *Figure piane.* II. III. *Poliedri.* IV. V. *Quàdriche*), accompagnate da una lunga e pregevole memoria esplicativa; essi si distinguono per la semplicità delle figure rappresentate (fra cui se ne trovano alcune piane) e per l'uso del filo di ferro anche nei casi (p. es. quando trattasi di poliedri) in cui sinora preferivasi il gesso. Vogliamo osservare che quest'uso è specialmente consigliabile quando le figure modellate siano curve; giacchè così, adoperando una lampada opportunamente disposta, si può dimostrare sperimentalmente quali curve piane nascano per proiezione (*per umbras*, come diceva Newton) da certe speciali linee gobbe, e quali relazioni intercedono fra le singolarità di una curva gobba e quelle di una sua proiezione.

(1) Notizie tolte dalla necrologia dell'illustre estinto dovuta a E. Lampe ed inserita nel T. XIII (1904) del *Jahresbericht der Deutschen Math.—Vereinigung*.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1904.

Digitized by Google

ANNO VII. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1904.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Recensioni ed annunzi: BIANCHI, *Teoria dei gruppi* [G. L.]. — GAZZANIGA, *Teoria dei numeri* [G. Vacca]. — BRAUNMÜHL, *Vorl. üb. Geschichte der Trigonometrie*. II. [G. L.]. — ENRIQUES, *Geometria proiettiva* [G. Z. Giambelli]. — KOENIGSBERGER, *Helmholtz*. II, III [G. L.]. — ROBIN, *Oeuvres scientifiques* [G. Vivanti]. — J. et P. TANNERY, *Notions de mathématiques* [G. L.]. — CANDIDO, *La formola di Waring* [G. L.]. — SCHUBERT, *Logarithmen* [G. L.]. — REICHEL, *Vorstufen* [G. L.]. — JOUFFRET, *Geométrie à quatre dimensions* [G. L.]. — HAUBER, *Statik* [G. L.]. — LOEVY, *Versicherungsmathematik* [G. L.]. - BAUER, *Algebra* [U. Amaldi]. — PASCAL, *I gruppi continui di trasformazioni* [G. Vivanti]. — KÜBLER, *Die Prop. des gold. Schnittes* [G. L.]. — MÜLLER *und* PRESLER, *Projektionslehre* [G. L.]. — BOREL, *Fonctions méromorphes* [G. Vivanti]. - CATANIA, *Aritmetica razionale* [C. Burali-Forti]. — KRAZER, *Thetafunktionen* [G. Vivanti]. — G. VIVANTI, *Funzioni modulari*.

Notizie: L. Gegenbauer. — Questione di storia dell'astronomia. — Calcolo delle probabilità. — Tema proposto dall'Accademia di Madrid. — Società matematica di Berlino. — Biblioteca scolastica. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Biografia dei determinanti. — G. G. Stokes.

RECENSIONI ED ANNUNZI

L. BIANCHI. *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni.* Anno 1902-1903. Pisa, E. Spoerri, 1903, litogr., 8.° gr., p. IX + 708 [Prezzo L. 16].

Questo nuovo elemento della serie di *Lezioni* che il prof. Bianchi va da qualche anno pubblicando (col mezzo della litografia o della stampa) va accolto assai festosamente, non solo perchè è ricco delle stesse doti eminenti che adornano i precedenti, ma anche perchè attesta un nuovo passo verso la completa emancipazione da opere straniere di matematiche superiori, a cui la patria nostra da parecchi anni si è felicemente avviata. Ma esso indubbiamente sarà ricercato e studiato con profitto anche al di là delle Alpi, perchè aduna in perfetto ordine logico, non solo tutte le idee fondamentali del Lie,

Digitized by Google

ma anche le conseguenze che diedero e gli ampliamenti ed i perfezionamenti che ricevettero e perchè in molti punti insegna semplificazioni ed aggiunte rilevanti. È caratteristica del metodo di esposizione prescelto dall'A. l'idea di modellare, per quanto è possibile, la teoria di Lie sopra quella di Galois, nell'intento di porre in piena luce che quella sembra chiamata a compiere nell'integrazione delle equazioni differenziali l'ufficio analogo a quello che a questa venne da più di un mezzo secolo affidato nella risoluzione delle equazioni algebriche. Si direbbe anzi che nello scegliere gli argomenti da svolgere e la nomenclatura da adottare, l'A. abbia assunto come criterio direttivo quello di aprire e lastricare la strada che mena alle importanti applicazioni analitiche che della teoria dei gruppi fecero il Picard ed il Vessiot, lasciando in disparte quelle, non meno importanti, che ne vennero già fatte alla geometria. Se di queste egli vorrà far cenno nella edizione definitiva (stampata), che certamente avrà questa opera, l'illustre A. accrescerà di una nuova le tante benemerenze che si è già acquistate presso i cultori delle scienze esatte.

G. L.

Gli elementi della teoria dei numeri di PAOLO GAZZANIGA. — Padova f.lli Drucker, 1903, pp. VIII + 408.

La teoria dei numeri è una di quelle che *vulgo abstrusiores et a vitae communis utilitate remotiores creduntur*, come già diceva Gauss nella dedica delle sue Disq. Ar. Non sarebbe forse impossibile il dimostrare che il volgo ha torto, essendo tale teoria legata indissolubilmente a quelle che ognuno riconosce utili e necessarie alla vita civile: è certo però che essa è tanto bella, tanto attraente, che ogni lavoro volto a diffonderne la conoscenza tra gli studiosi delle matematiche raggiunge certo lo scopo di educare e di acuire quel senso estetico che è uno dei principali stimoli alle ricerche scientifiche.

È perciò con molto piacere che vediamo le lezioni del Gazzaniga, e che speriamo che lo sforzo notevole che egli ha compiuto valga ad accrescere in Italia la scarsa schiera dei cultori della teoria dei numeri.

E veramente lodevole è il disinteresse dell'editore e dell'autore non potendosi purtroppo sperare che la diffusione del libro valga a compensare almeno in parte rilevante le diligenti cure con cui il libro è stampato e corretto.

Ecco un'idea dell'opera. Nei primi otto paragrafi (da p. 1 a p. 218) l'A. parla dei divisori e dei multipli, dei principî della teoria delle congruenze e dell'analisi indeterminata di primo e secondo grado. Nei quattro paragrafi successivi (da p. 219 a 408) l'A. sviluppa la teoria dei numeri algebrici, cominciando dal caso particolare del campo qua-

Digitized by Google

dratico e terminando colla esposizione sommaria della teoria degli ideali di Kummer e le ricerche posteriori di Kronecker, Weber, ecc. La trattazione ricorda nelle sue linee generali il piano dell' opera del Dedekind-Dirichlet.

Per tale via si arriva rapidamente alla considerazione dei problemi più astrusi e complicati della teoria dei numeri; si ha però forse l'inconveniente di non far ammirare abbastanza i principî di questa scienza, così attraenti e ad un tempo così difficili. E l' inconveniente è più sensibile qui che in altri rami del sapere, poichè è la ricerca della precisione e del rigore assoluto nei principî che costituisce la precipua ragione d'essere delle successive estensioni di questa teoria. Basti il dire ad es. che la scoperta degli ideali di Kummer è un prodotto dello sforzo, non completamente coronato da successo, di giungere alla dimostrazione rigorosa del così detto *ultimo teorema di Fermat.*

Malgrado questo mio modo di vedere, non credo però che sia questo un appunto da farsi al libro, il piano del quale risponde probabilmente all' indirizzo degli studenti universitari ai quali è più specialmente rivolto.

Desidero soltanto rilevare alcuni difetti relativi alla parte elementare, ed alcuni altri alla parte storica. Sono difetti che si possono togliere e che mi auguro spariranno in una prossima edizione.

A pag. 5 l' A. considera il campo [1], che coincide con quello chiamato « n » nel *Formulario* del prof. Peano. L' A. in questo campo definisce come massimo comun divisore di due numeri, il massimo comun divisore dei loro moduli. Ciò va d'accordo anche col Form. pag. 92. Però poche linee più sotto (lin. 27) parla di un massimo comun divisore eguale a ± 1. Ciò è in contraddizione colla definizione data, secondo la quale il massimo comun divisore (per cui l' A. adopera tre lettere *MCD* invece di una sola *D* che era già stata proposta opportunamente dal Lebesgue ed adottata dal Lucas e da altri) è essenzialmente positivo o nullo.

Le proposizioni a pag. 5 che l' A. attribuisce ad Euclide, estese ai numeri con segno, hanno bisogno di opportune restrizioni e dilucidazioni che mancano non solo nell'A., ma anche negli ordinari trattati.

A pag. 9 l'A. cambia la definizione di numero primo chiamando tali anche i numeri $-2, -3, \ldots$ contrariamente all' uso comune ed alla convenienza della trattazione, come egli stesso riconosce, ritornando quindi alla ordinaria definizione.

Il teorema 28) a pag. 9 ha bisogno dell' ipotesi restrittiva che n sia positivo o nullo, altrimenti si entra nel campo dei numeri razionali.

A pag. 10) si afferma che i numeri primi nella serie naturale « si presentano ad intervalli *sempre* più grandi ». Ciò non è esatto. Alle parole *sempre più* bisogna sostituire la parola *comunque*. È noto infatti

Digitized by Google

che parecchie proposizioni empiriche (di cui la più semplice dice ad es. che vi sono infinite coppie di numeri primi la cui differenza è eguale a 2) contraddicono all'affermazione dell'A. Nessuno finora ha dimostrato la falsità o la verità di questi teoremi.

L'indicazione a pag. 11 non è esatta in tutto. Le proposizioni 28) e 35) si trovano in Euclide, non nel libro IX, ma nel libro VII P 30,31. La 30) si deve a Legendre e non a Gauss, la 32) è dovuta a Leibniz e la 32) a Pascal, come risulta p. es. dal *Formulario* del prof. Peano.

È da sopprimersi a pag. 14 la frase « questo teorema si ritiene sia stato noto ad Euclide », il teorema è proprio la prop. 31 del libro VII degli Elementi.

Non so se abbia fondamento l'osservazione dell'A.: « Si attribuiscono pure ad [Euclide] i seguenti [teoremi]:

Vi sono infiniti numeri primi ... tra i numeri $6n-1, 4n-1, 4n+1$.

Il teorema che dice che se i numeri a e b sono primi tra loro vi sono infiniti numeri primi tra i numeri $an+b$ è dovuto a Legendre e non a Dirichlet. Dirichlet è il primo che ne abbia dato una dimostrazione rigorosa.

A pag. 18 si dice che per decidere se un numero n è primo o composto si dovrebbero « fare almeno tante divisioni con resto, quanti sono i numeri primi che giacciono tra 1 ed n ».

Basta invece come già aveva osservato Leonardo Pisano, dividere n per tutti i numeri primi compresi tra 1 e $\sqrt{n}$, come dice l'A. stesso nella pagina successiva col teor. 42.

A proposito del teorema di Wilson (a pag. 21) sarebbe bene aggiungere che la prima dimostrazione di esso è stata data da Lagrange. La prop. 45) è stata enunciata e dimostrata da Leibniz ed era probabilmente nota anche a Fermat. La dimostrazione della prop. 46) è di Leibniz.

I teoremi 52) e 53) non sono dovuti a Gauss, ma bensì a Wallis, come ho già fatto rilevare nel *Formulario* del prof. Peano (edizione del 1902, pag. 141 e 142).

Ecco ad esempio il passo di Wallis del 1685 (*Opera omnia* t. 2, p. 498), relativo al teor. 52):

« *Si fiat Numerus, qui ex continua Multiplicatione quotcunque numerorum Primorum (inter se diversorum) aut quarumvis Potestatum talium primorum: Numerus divisorum numeri sic compositi, componitur (continua Multiplicatione) ex Primorum illorum, eorumve Potestatum sic compositarum, Exponentibus, Vno, singulatim auctis* ».

La generalizzazione del teorema di Fermat data a pag. 27 è dovuta ad Eulero e non a Gauss. Si deve parimenti ad Eulero il primo studio della funzione φ. (Euler *Novi comm. Acad. Sc. Petrop.* a. 1760-61,

Digitized by Google

t. 8, p. 85-103, *Act. Ac. Sc. Petrop.* a. 1780 t. 4_2 p. 18). Euler indicò tale funzione col simbolo π. A Gauss è dovuto soltanto il teor. 55).

Il nome di *indicatore* è stato introdotto da Cauchy *Oeuvres*, s. 1, t. 6, p. 124 con un significato alquanto diverso da quello usato dall'A.

A pag. 52 si legga quindi Euler invece di Gauss.

Mi sembra ingiusto che l'A. cominciando ad esporre la interessante teoria delle congruenze lineari (pag. 52 e seguenti) citi soltanto Kronecker (1890), Frobenius (1879-80) ed altri tacendo che molti ed interessanti risultati di questa teoria sono dovuti ad H. J. S. Smith (*Phil. Trans.* vol. 151, 1861; *Proc. of the London math. soc.* anno 1873, t. 4).

Il fondatore della teoria delle congruenze binomie, degli indici, e delle radici primitive è Euler, come Gauss stesso afferma (*Werke* t. 1, p. 46, ecc.). Si debbono quindi ad Euler la maggior parte dei teoremi del § 4 (pag. 68 e seg.).

A pag. 100 l'A. dice: « *Sembra* che *Euler* abbia prima di Legendre enunciato [la legge di reciprocità dei numeri primi] ». Il passo di Euler è stato riportato per intero da Tchebychef nella sua teoria delle congruenze (trad. italiana di I. Massarini, 1895, pag. VII); esso si trova negli *Opuscula analytica* del 1772, t. 1.

L'affermazione che le più interessanti dimostrazioni della legge di reciprocità siano quelle di Gauss, Zeller, Kronecker ed Eisenstein, mi sembra incompleta. Perchè non citare la dimostrazione di Genocchi del 1852 (*Mém. de l'Acad. de Bruxelles*) che il Kronecker stesso disse « sehr einfache, rein aritmetische » e che giudicò tanto importante da ristamparla nel « *Journal für Mathematik* » quarant'anni dopo la prima pubblicazione? Il nome di Genocchi non dovrebbe mancare qui ed altrove, in una teoria dei numeri stampata in Italia. Aggiungo però che purtroppo, mentre fuori d'Italia si raccolgono con diligenza le opere dei sommi spesso, mentre essi sono ancor vivi in modo da proporli a modello alle nuove generazioni, da noi le opere di Genocchi sparse in riviste in parte inaccessibili, o quasi, attendono da quindici anni di esser tratte da un immeritato oblio. (Da consultarsi: *Cenni Necrologici di A. Genocchi*, letti il giorno trigesimo dalla sua morte da F. Siacci, Torino 1889, Mem. dell'Accad. d. Sc. s. 2, t. 39).

A pag. 118 l'A. crede di dedurre dal teorema di Bachet, dimostrato da Lagrange, che ogni intero *positivo* (l'A. non lo dice ma è evidentemente necessario che sia tale) è eguale alla somma di quattro, o di un minor numero di quadrati (che si possono supporre interi e positivi), l'altro teorema enunciato da Fermat, che ogni numero è forma di tre o di un minor numero di trigonali.

Ora la dimostrazione del corollario a pag. 118 che è la parte so-

Digitized by Google

stanziale della deduzione è inesatta. Essa contiene una posizione incompatibile. Non può mai darsi che tre interi non nulli soddisfacciano alle due relazioni $z+1=4c+2$, $z-1=4d+2$.

Ma anche correggendo questa posizione, il ragionamento dell' A. continua ad essere difettoso. Esso non è che una illecita inversione delle considerazioni fatte da Legendre nella sua *Théorie des nombres* a. 1830 t. 1, § 157 (pag. 220 della versione tedesca). Non è dubbio che esista una dimostrazione elementare del teorema di Fermat, come se ne sono trovate varie per il teorema di Bachet (p. es. la recente di A. Matrot, Paris a. 1891). Ma finora tale dimostrazione non si ha ed è a desiderarsi, malgrado gli sforzi fatti da Euler, da Lagrange e da Legendre per giungervi. La prima dimostrazione rigorosa (ma assai complicata, dipendendo dalla teoria delle forme ternarie) del teor. di Fermat è stata data da Gauss (*Werke* t. 1, pag. 348), il quale a ragione se ne attribuisce la paternità dicendo di questo teorema che « a *Fermatio olim inventum est, sed eius demonstratio rigorosa hactenus desiderabatur* ». Dal teorema di Fermat come Gauss, e forse prima di lui Euler, osserva, è facilissimo dedurre il teorema di Bachet.

A pag. 119 l'A. chiama *numeri pitagorici* ciò che gli aritmetici classici hanno chiamato « *triangles rectangles en nombres* » (Fermat, ...). Egli non dice che *tutti* i triangoli rettangoli in numeri possono essere generati dalla nota identità $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$, cosa che il Frénicle già sapeva.

Nel § 7 l' A. accenna alle varie teorie dei numeri immaginari. Sarebbe opportuno accennare almeno alle originali teorie di W. R. Hamilton, esposte nella classica ma poco nota memoria sull'Algebra come scienza del puro tempo (*Irish Trans.* a. 1837), nella quale si trova in germe la interpretazione notevole, ed a mio modo di vedere di gran lunga superiore ad ogni altra, data dal prof. Peano nel *Formulario* (ed. del 1902, pag. 218 e seguenti. (Si veda altresì il *Bulletin de Niewenglowski*, 15 Juin 1902).

A pag. 122 l' A. enuncia un teorema cominciando inesattamente (seguendo molti autori) « *La condizione necessaria e sufficiente*, ecc. ».

Non è lecito parlare di un' *unica* condizione necessaria e sufficiente. Noi diciamo che il teorema *A* è condizione necessaria e sufficiente del teorema *B*, quando da *A* si deduce *B*, e viceversa. Il che basta per farci concludere che tante saranno *le* condizioni necessarie e sufficienti di un teorema *A*, quanti sono i teoremi *B*, *B'*, *B''*, ... da ciascuno dei quali si possa dedurre *A* e basti per dedurne *A*. Per correggere l'enunciato dell'A. basta ed occorre all'articolo *la* sostituire l'articolo *una*.

A pag. 223 l' A. introduce la somma ed il prodotto di due coppie di numeri con un procedimento illecito. Si veda la critica nel *Formulario* del prof. Peano a. 1903, t. 4, pag. 317.

Digitized by Google

Aggiungerò infine che sarebbe utile aggiungere come notizia dopo il teorema di Gauss (pag. 360), che dei numeri primi della forma $2^n + 1$ sono finora noti quelli che si ottengono ponendo $n = 2^2, 2^3, 2^4$, che si sa che danno numeri composti i valori $n = 2^5$ (Euler); $n = 2^6$ (Landry); $n = 2^{11}$ (Cunningham); $n = 2^{12}, 2^{13}$ (Pervouchine) e finalmente $n = 2^{36}$ (Seelhoff). Nulla si sa per $n = 2^7$ contrariamente all'asserzione di Klein (*Conferenze su alc. quest. di geom. elementare* ed. italiana, Torino, 1896 pag. 14).

Concludendo, io spero che questi appunti non tolgano al libro del prof. Gazzaniga tutta quella considerazione che esso merita, tra gli studenti delle nostre università.

Genova, Novembre 1903.

G. Vacca.

A. von Braunmühl. *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* II. *Tl. Von der Erfindung der Logaritmen bis auf die Gegenwart.* Mit 39 Figuren im Text. 8° gr. pag. XI + 264. Leipzig, Teubner 1903 [Prezzo Mk. 9].

Questo secondo ed ultimo volume dell'importante opera del Braunmühl è destinato a ricevere un plauso ancora più esteso e a destare un interesse ancora più ampio del primo (cfr. questo *Bollettino*, III, 1900, p. 100); chè se a qualcuno può apparire opera di semplice curiosità il rintracciare le prime vestigia delle nostre cognizioni, nessuno potrà rimanere indifferente dinanzi un'esposizione sapientemente organizzata dell'odierna nostra ricchezza scientifica, ben sapendo di quale e quanta utilità essa possa tornargli. Ed appunto per dare ai nostri lettori un'idea di quale copiosa raccolta di notizie utili sia il volume che annunciamo, reputiamo da adottarsi il sistema il dare uno schematico riassunto dei sei capitoli di cui esso componesi, dopo di avere rilevato che l'A. ha di proposito esclusa la considerazione delle applicazioni della scienza di cui narra la storia.

Cap. I. *Scoperta dei logaritmi e sua influenza sulla trigonometria.* — Vi è una parte importante della trigonometria pratica che esige vengano eseguiti calcoli lunghi ed esatti; sopra di essa l'invenzione dei logaritmi esercitò influenza totalmente rinnovatrice, tanto che Laplace ebbe con ragione a dichiarare avere « la scoperta dei logaritmi raddoppiata la vita degli astronomi »: in una storia della trigonometria occupano quindi un posto onorevole ed importante i metodi di calcolo i cui fondamenti vennero gettati dal Bürgi e dal Nepero. Ma quest'ultimo ha anche il grande merito di avere totalmente riorganizzata la trigonometria sferica, svolgendo compiutamente idee consegnate in un'opera del Torporley; così non solo aggiunse

Digitized by Google

alla raccolta delle relative proposizioni le celebri *analogie* che vanno sotto il suo nome, ma compendiò in una vantaggiosissima regola unica le varie proposizioni dianzi usate per risolvere i triangoli rettangoli. I metodi di calcolo basati sopra i logaritmi si diffusero abbastanza rapidamente in Germania, per merito specialmente di un sommo astronomo, il Keplero, malgrado l'opposizione che gli esagerati seguaci di Euclide facevano contro un metodo aritmetico fondato sopra considerazioni meccaniche; in Inghilterra il Briggs ed il Gellibrand agirono efficacemente nel medesimo senso: altrettanto fecero il Vlack in Olanda, il Faulhaber in Germania, in Italia il Cavalieri (al quale devesi poi la scoperta della formula che dà l'area del triangolo sferico ed il primo tentativo di una teoria dei logaritmi d'addizione), in Svezia l'Elvius ed altri minori in Francia. Onde bèn presto tutto il mondo civile venne posto in condizioni di fruire degli straordinari vantaggi provenienti dall'uso dei logaritmi.

Cap. II. *La trigonometria sino al principio del secolo XVIII.* — A diffondere questi nuovi metodi, nonchè le teorie trigonometriche in genere, e perfezionare in punti di dettaglio gli uni e le altre, servirono egregiamente un buon numero di memorie speciali e di opere didattiche generali che comparvero nel Sec. XVII: basti qui citare i corsi di matematiche di A. Tacquet, C. F. Milliet Dechales, Herigone ed Ozanam e ricordare l'ampia e benefica influenza che essi esercitarono. Alla stessa epoca appartengono ricerche sopra le sezioni angolari e la rettificazione del circolo condotte a termine dal Wallis, dal Renaldini, dal Sovero e specialmente dall'Huygens e da G. Gregory (al quale devesi il primo tentativo di dimostrazione dell'impossibilità di quadrare il circolo); nè possono venire passate sotto silenzio le eleganti espressioni di π in prodotto infinito ed in frazione continua dovute al Wallis ed a Lord Brouncker. Il sorgere e lo svolgersi del metodo infinitesimale suggerì alla trigonometria nuove questioni, fornendo in pari tempo il mezzo per trattarle, in particolare condusse ai notissimi sviluppi in serie delle funzioni trigonometriche dirette ed inverse: per tal modo nella storia della trigonometria entrano i nomi gloriosi di Leibniz e Newton e dei loro immediati discepoli.

Cap. III. *Svolgimento della trigonometria nel Sec. XVIII prima di Eulero.* — A Newton devesi poi la prima formola generale per esprimere *sen* $n\varphi$ in funzione di n e *sen* φ; enunciata in una lettera diretta ad Oldenburg il 13 Giugno 1676, venne dimostrata dal De Moivre nel 1698, ma sembra passasse inosservata sul continente, dal momento che i fratelli Bernoulli nell'intorno del 1700 avvertirono la necessità di formole dell'indicato tipo e, assieme al loro discepolo Hermann ed al Lagny, le stabilirono. Circa nello stesso tempo vennero scoperti gli eleganti teoremi di De Moivre e Côtes, determinate le derivate

Digitized by Google

delle funzioni trigonometriche, e, coll'introduzione degl'immaginari, vennero aperte nuove vie alla risoluzione del problema della divisione degli angoli; mentre altri geometri (fra cui emergono il Machin ed il Lagny) giunsero a formole convenientissime per calcolare π con grande approssimazione, ed altri ancora, con a capo lo Stirling, introdussero ed applicarono i fecondi metodi d'interpolazione. Nè venne posta in non cale la trigonometria elementare; basti a provarlo l'*Aritmetica universale* di Newton!

Cap. IV. *Leonardo Eulero.* — Negli ultimi settant'anni del Sec. XVIII la storia della matematica è tutta dominata dalla gigantesca figura di Leonardo Eulero, il quale ampliò e perfezionò ogni ramo delle scienze esatte: l'indirizzo naturale del suo ingegno portandolo a migliorare in generale la forma analitica di ogni teoria, non è da stupire se, anche la teoria delle funzioni circolari, sia a lui debitrice di una simbolica pienamente soddisfacente. Egli poi ha insegnato da un lato a considerare metodicamente le funzioni trigonometriche come rapporti di linee, e dall'altro a porne la teoria sopra una base puramente analitica: l'immensa diffusione che ottenne l'*Introductio in an. infin.* ci dispensa dall'aggiungere ulteriori particolari in proposito. Inoltre la proverbiale abilità di Eulero in ogni sorta di calcoli, gli permise di portare contributi di valore permanente alle incessanti indagini fatte per calcolare π. Finalmente alla trigonometria sferica il grande matematico di cui parliamo dedicò due fondamentali memorie: in una delle quali egli insegnò a fondarla sopra la teoria dei massimi e minimi (1), mentre nell'altra si trova la prima trattazione sistematica, ove, con procedimento puramente algebrico elementare, sono dedotte tutte le formole della trigonometria sferica, da tre di esse ricavate direttamente dalla figura, e ne sono esposte interessanti e svariate applicazioni. Non è quindi esagerato od ingiusto il dire che anche per la trigonometria in generale la comparsa di Eulero apre un'èra totalmente nuova, che è quella in cui oggi ancor noi ci troviamo.

Cap. V. *Contemporanei e successori di Eulero nel Sec. XVIII.* — Fra coloro che in Germania si occuparono di trigonometria nell'epoca euleriana, emerge il Lambert, che accettò, perfezionandola e svolgendola, la definizione delle funzioni circolari come rapporti segmentari, dimostrò le regole date da Nepero per risolvere i triangoli sferici rettangoli, perfezionò la teoria delle funzioni iperboliche e per primo dimostrò rigorosamente l'irrazionalità di π. Al Klügel devesi invece

(1) Tale metodo se ha l'inconveniente di essere non elementare, ha il pregio di essere applicabile alla trigonometria sferoidica, di cui appunto Eulero ha gettati i fondamenti in un lavoro posteriore.

Digitized by Google

di avere avvertita la grande importanza del teorema di addizione delle funzioni circolari; al Lexell, a N. Fuss, a S. L'Huillier devonsi poi alcune formole semplici e nuove, che i nostri lettori indubbiamente ricordano. Di trigonometria sferica si occupò anche, a scopo astronomico, Lagrange, mentre ad un altro italiano, il Cagnoli, siamo debitori di un celebre trattato di trigonometria e della prima relazione fra tutti i sei elementi di un triangolo sferico. Il Lambert e J. T. Mayer, gettarono le basi della tetragonometria, preludendo così alla poligonometria, la cui nascita è legata ai nomi del Lexell e del L'Huillier, e alla poliedrometria, che attrasse l'attenzione di Carnot; sopra altri lavori concernenti le tavole trigonometriche, alcune serie speciali e la ciclometria ci sia concesso di sorvolare; meritano invece un cenno le relazioni differenziali fra gli elementi di un triangolo sferico — che, ispirandosi ad idee di Côtes, R. Boscowich ha stabilite ed il Cagnoli svolte — ed il celebre teorema con cui Legendre insegnò a surrogare, con un certo grado d'approssimazione, ogni triangolo sferico, con un conveniente triangolo piano. Fra i perfezionamenti di forma che subì alla fine del Sec. XVIII la trigonometria sferica, vanno ricordati quelli recati da Lagrange, mostrando come tutta questa disciplina potesse fondarsi sopra una formola unica, e da T. Schubert, prendendo come punto di partenza il teorema di Menelao (1).

Cap. VI. *La trigonometria durante il Sec. XIX.* — Come per tanti altri rami di scienza, così per la trigonometria il Sec. decorso ha esercitata un'azione piuttosto nel senso di allargare ed assodare le basi, di investigare nuovi punti di partenza, di generalizzare certi risultati, che di stabilire verità totalmente nuove; a dimostrare che tale azione sia meritevole della massima considerazione basterebbe enumerare i nomi degli scienziati illustri che l'esercitarono. Primo fra essi il Carnot, che stabilì la incondizionata validità del teorema d'addizione delle funzioni circolari e pose la teoria delle proporzioni come fondamento alla loro teoria; poi il Mobius, che avvertì la necessità d'introdurre nella trigonometria piana i segni di angoli e segmenti: tale idea venne pienamente svolta e popolarizzata dal Baltzer ne' suoi *Elementi di Matematica.* A Gauss compete il merito di avere estese le formole della trigonometria sferica a triangoli in cui lati ed angoli non sono soggetti a limitazione alcuna; altri, seguendone l'esempio, svolsero completamente tale concetto. Il Bellavitis mostrò nella sua *Geometria descrittiva* in qual modo si possano graficamente stabilire le formole fondamentali della trigonometria sferica, mentre P. Serret e A. F. Mobius fecero vedere come lo stesso intento potesse venire raggiunto usando la projezione stereografica od

(1) È questo un metodo che trovasi in germe nell'*Almagesto* di C. Tolomeo.

Digitized by Google

il calcolo baricentrico; finalmente W. R. Hamilton e C. Stephanos hanno dimostrato come altrettanto si possa fare appoggiandosi alla teoria degli invarianti o dei quaternioni. Nuove relazioni fra gli elementi di un triangolo sferico furono stabilite da Delambre, L'Huillier, Gudermann, Bretschneider ed altri; che altre possano ricavarsi dalla teoria delle funzioni ellittiche venne osservato da Lagrange e svolto da Durége, mentre l'uso allo stesso intento delle proprietà dei risultanti venne segnalato da Fr. Mayer e quello della teoria dei gruppi da un altro allievo del Klein, E. Study. Fra le altre aggiunte fatte nel corso del Sec. XIX alla trigonometria sferica ci limiteremo a ricordare la trigonometria del circolo minore, la quale, inaugurata da D'Alembert, Bossut e Quetelet, deve i propri più essenziali ingredienti a Townsend, H. Faure e C. Hudson. Dal punto di vista metodologico meritano di essere ancora ricordati l'idea di definire e studiare le funzioni trigonometriche mediante integrali o mediante equazioni funzionali ed i vari procedimenti che vennero suggeriti per svolgere tali funzioni in serie; J. W. Glaisher e E. Lemoine segnalarono poi dei metodi notevoli per ottenere identità fra funzioni trigonometriche di vari angoli; anche i metodi di calcolo di π subirono nel secolo passato notevoli perfezionamenti e l'antico problema della quadratura del cerchio ottenne finalmente, per opera di F. Lindemann, sia pure in senso negativo, la soluzione da tanti secoli invocata. Il desiderio di essere brevi ci consiglia a sorvolare su alcune ricerche di poligonometria e di poliedrometria, compiute nel corso del medesimo periodo, soltanto citando il concetto di « seno d'un angolo triedro » dovuto a Staudt. E finiremo notando come sia stata creata di recente la trigonometria delle superficie pseudo-sferiche, come il Booth abbia tentato di stabilire una trigonometria parabolica e come il Günther e l'Unvergazt abbiano studiato delle funzioni abbraccianti come caso particolarissimo le funzioni circolari ed iperboliche.

I nomi e le indagini che abbiamo ricordate nel precedente riassunto delle *Vorlesungen* del Braunmühl sono una piccolissima parte di quelle che avremmo citate se avessimo seguito passo passo il nostro autore. Crediamo però esse saranno sufficienti a porgere un'idea adeguata della ricchezza che racchiude la miniera storica di cui la letteratura matematica giunse recentemente in possesso. Possa il modello fornitoci dal dotto professore del Politecnico di Monaco venire imitato; possa il suo esempio venire seguito: così verrà soddisfatto il desiderio che molti sentono di storie di speciali rami delle matematiche.

G. L.

Digitized by Google

FEDERIGO ENRIQUES. *Lezioni di Geometria projettiva.* Seconda edizione aumentata. — Bologna, Zanichelli, 1904, pag. VIII-409. [Prezzo L. 10].

Mi pare anzitutto opportuno riportare alcune delle parole premesse dal Klein alla traduzione tedesca (1) di questo pregievole libro del prof. Enriques:

Es fehlt ja bei uns nicht an anregend geschriebenen Werken, die zur Einführung in die projektive Geometrie geeignet sind, aber ich kenne keines, welches den systematischen Aufbau dieser Disziplin in einer dem heutigen Stande der Wissenschaft entsprechenden Form in so durchsichtiger und gleichzeitig so vollständiger Weise darböte, wie das vorliegende.

Siccome il prof. Segre ha in questa rivista (T. I, p. 11) già parlato della prima edizione, mi limiterò semplicemente a dire qualche cosa intorno alle aggiunte. Le quali nel testo, per la maggior parte, si riferiscono agli elementi imaginari, incominciando da alcune osservazioni sulle involuzioni ellittiche, che servono a dare un cenno della teoria geometrica delle coppie di elementi imaginari coniugati, svolta nel 1888 dal Segre in una importante Memoria pubblicata dalla R. Acc. di Torino. In modo approssimativo si può dire che le considerazioni sulle coppie di elementi imaginari si riferiscono ai varii problemi di primo grado, di secondo e biquadratici sulle costruzioni fondamentali di coniche. Noterò poi il teorema sulla possibilità di proiettare le involuzioni ellittiche sulla retta secondo un'involuzione circolare di raggi, e l'area del segmento parabolico. Nello studio della proiettività tra forme di 3.ª specie è stato opportuno dall'aspetto didattico aggiungere le considerazioni duali.

Merita speciale attenzione la parte nuova dell'Appendice. Dalla definizione di potenza ad esponente fratto o irrazionale di una proiettività si deduce quella di gruppo continuo di proiettività, e in particolar modo si considera il gruppo continuo costituito dalle omologie speciali dello spazio e si dimostra come due gruppi di tali omologie si possono riferire tra loro isomorficamente. Questi cenni sui gruppi di proiettività servono a completare le considerazioni sulla geometria astratta, dimostrando che si può determinare una proiettività tra due spazi astratti, i cui elementi abbiano un significato arbitrario, purchè soddisfacenti ai postulati della geometria proiettiva. Della geometria astratta vien fatta un'elegante applicazione alle trasformazioni isogonali dello spazio, che mutano sfere in sfere.

G. Z. GIAMBELLI.

(1) *Vorlesungen über projektive Geometrie.* Deutsche Ausgabe von H. Fleischer. Leipzig, Teubner, 1903.

Digitized by Google

L. KOENIGSBERGER. *Hermann von Helmholtz.* II Bd. Mit zwei Bildnissen, p. XIV+383. III Bd. Mit vier Bildnissen und einem Brieffacsimile, p. IX+142. Braunschweig, Vieweg, 1903 [Prezzo: in brochen Mk. 8+4; leg. in tela 10+5; in mezza pelle 12+7] (1).

Col secondo matrimonio di Helmholtz (avvenimento col quale chiudesi il I volume dell'opera di Königsberger (2), comincia pel sommo investigatore un periodo di pace e domestica felicità, durante il quale la sua feconda attività scientifica raggiunse il massimo d'intensità. In corrispondenza divenne più intensa, profonda e vasta l'estimazione in cui egli era tenuto; valgano a provarlo il prorettorato dell'Università di Heidelberg, che gli venne dai colleghi conferito nell'anno 1862, e le festose accoglienze che egli ebbe in Inghilterra (ove fu chiamato a tenere il 14 Aprile 1864 la « Croonian lecture ») ed in Francia nel 1866 e l'anno di poi, in occasione del Congresso oftalmologico.

Per porgere un'idea del genere delle ricerche che occupavano Helmholtz nel corso di tale periodo e dei risultati che esse diedero, ricorderemo che negli anni 1863-1867 apparve la *Physiologische Optik* e vennero alla luce due edizioni (la seconda assai più perfetta della prima) di *Die Lehre der Tonempfindungen.* Negli stessi anni poi Helmholtz venne gradatamente condotto a studiare quelle fondamentali questioni psico-fisiologiche che gli valsero un posto permanente e cospicuo nella storia della geometria non euclidea; la parte corrispondente dell'opera del Königsberger, ricca di nuovi documenti pieni di interesse (basti ricordare tra essi una lettera del Beltrami), sarà quella che i matematici leggeranno con maggiore interesse oggi e consulteranno più frequentemente in avvenire.

La morte di H. G. Magnus, avvenuta a Berlino il 4 Aprile 1870, segna per Helmholtz il principio di un'èra novella; i lavori di fisica teorica che egli aveva condotti a termine nell'ultima fase della sua attività lo designavano a succedergli; onde il giorno stesso della morte di Magnus, E. du Bois-Reymond, allora rettore, gli scrisse accennando alla possibilità di un trasloco a Berlino. Tale idea riscosse l'approvazione di Helmholtz, ma le negoziazioni conseguenti vennero ostacolate dalla guerra franco-prussiana poco dopo scoppiata (e durante la quale egli riprese il suo antico posto di medico militare); finalmente, con

(1) Questi volumi vanno adorni di altri quattro ritratti di Helmholtz, fatti dal Lenbach negli anni 1884-1891; inoltre della fotografia del di lui busto scolpito nel 1891 da Hildebrand, e del ritratto della Sig.ª Helmholtz dovuto pure a Lenbach (1895); finalmente del facsimile di una lettera che il grande scienziato scrisse a suo padre il 17 Dicembre 1850.

(2) Cfr. questo *Bollettino*, T. VI, 1903, p. 68-70.

Digitized by Google

decreto imperiale firmato a Versailles il 13 Febbraio 1871, Helmholtz venne chiamato a succedere il Magnus; il governo badese, per quanto dolente della perdita che in conseguenza subiva l'Università di Heidelberg, non si oppose a tale trasferimento, ben sentendo come colui che era ritenuto il più grande fisico della Germania doveva essere lustro e decoro dell'Ateneo avente la propria sede nella capitale del nuovo impero tedesco. Notevole il fatto che nello stesso momento gli veniva offerto, col mezzo di Sir William Thompson, la cattedra di fisica sperimentale a Cambridge, a condizioni vantaggiosissime.

A partire dal semestre estivo 1871 Helmholtz occupò il suo nuovo ufficio, tenendo quei corsi di fisica teorica che una pubblicazione fatta da alcuni suoi discepoli ha reso poi noti in tutto il mondo degli studiosi. Gli unici avvenimenti notevoli della sua vita in questo periodo furono le sue importanti pubblicazioni, i molteplici viaggi da lui fatti a scopo scientifico o per riposare in Inghilterra, in Italia (1), in Austria, in Francia, e le innumerevoli onorificenze che a lui pervenivano da ogni parte del mondo: rileveremo soltanto il rettorato dell'Università di Berlino, conferitogli dai colleghi in segno di protesta contro attacchi verso di lui e la sua famiglia; assumendo tale ufficio egli pronunciò (15 Ottobre 1877) un'orazione vero monumento di sapienza civile, vero modello di ben intesa arte oratoria.

La fondazione a Berlino di un grande istituto nazionale di fisica teorica ed applicata, dovuta in gran parte alla munificenza di Werner von Siemens, portò l'ultimo cambiamento radicale nella posizione ufficiale di Helmholtz. Con decreto imperiale del 4 Aprile 1888 egli fu chiamato ad organizzarlo e dirigerlo; in pari tempo le sue funzioni universitarie vennero ridotte al solo obbligo di tenere un corso di fisica teorica: così, mentre gli si concedeva tempo sufficiente per potere completare le svariate ricerche che aveva iniziate, gli si forniva il mezzo per diffondere dalla cattedra i risultati che egli avrebbe ottenuti e che infatti conseguì.

Che le speranze in lui riposte non siano state frustrate è dimostrato dallo sviluppo che prese e dai frutti che diede la « Physikalisch-technische Reichsanstalt »; che la fama di Helmholtz e la venerazione di cui godeva fossero in continuo aumento venne attestato dalle memorabili feste che vennero a lui fatte nel 1891, in occasione del suo settantesimo genetliaco, e nel 1893, in memoria del 50.° anniversario della sua laurea. Tali feste segnano forse il punto di maggior splendore della sua vita; col 1893 ne comincia il ramo discendente. Già il viaggio fatto in America, per rappresentare la Germania all'espo

(1) Nel 1873 egli conobbe a Bologna il Beltrami, che rivide poi a Firenze nel 1877.

Digitized by Google

sizione universale di Chicago, lo aveva un po' affaticato; ma un accidente, che gli occorse durante la traversata di ritorno, fece temere fosse per giungere la sua ora estrema. Però le intelligenti cure di cui egli fu fatto segno e la robusta sua fibra gli concessero di rimettersi, almeno parzialmente. Senonchè la morte del suo diletto discepolo, H. Hertz, avvenuta il 1.° Gennaio 1894, riempì di tristezza e di melanconici presagi l'alba dell'anno che doveva essere ultimo della sua operosa esistenza. La morte del Kundt, successore di Helmholtz nell'Università di Berlino, e quella del figlio Roberto, che sembrava destinato a continuare le gloriose tradizioni paterne, nonchè le precarie condizioni di salute dell'altro figliuolo Fritz, sembravano confermare tali indizi minacciosi. La solida quercia, colpita da tante parti, il 12 Luglio di quell'anno cominciò a dar non dubbi cenni di prostrazione e rovina; l'8 Settembre di quell'anno, alle ore 1.11' dopo mezzanotte, il grande scienziato non era più.

Con la fine di Helmholtz il Konigsberger non ha creduto di dovere chiudere la sua grande opera; egli ha voluto ancora far conoscere i postumi onori che a lui vennero tributati dalla grande patria tedesca, a capo della quale si trova, in questa come in tutte le grandi circostanze, l'imperatore Guglielmo II. Il quale con munificenza sovrana volle che all'immortale fisico fosse elevato degno monumento all'Università di Berlino. Anna von Mohl, l'eletta sua compagna, potè assistere alla inaugurazione di esso; ma poco dopo, quasi che il suo compito sopra questa terra fosse esaurito, essa andò a raggiungere il suo diletto compagno (1.° Dicembre 1894). Due anni dopo, lo seguiva anche il figlio Fritz (17 Novembre 1901); ed è appunto sulla tomba di questi che il Konigsberger s'impegnò di comporre la biografia che, con ammirabile sollecitudine e giovanile entusiasmo, egli ha portato a compimento.

I particolari biografici che, per l'indole del nostro *Bollettino*, non abbiamo potuto tacere, ci hanno vietato di seguire l'autore nella profonda analisi che egli ha presentata della meravigliosa opera scientifica di Helmholtz, considerato come fisiologo e fisico, come matematico e filosofo. Volendo chiudere questo schizzo dell'*uomo* con un rapidissimo cenno sintetico dello *scienziato*, non troveremmo di meglio che riferire qui tradotto l'indirizzo che un celebre amico d'infanzia di Helmholtz, E. du Bois-Reymond, scrisse, per incarico dell'Accademia di Berlino, in occasione del 50.° anniversario della laurea di Helmholtz; se non lo facciamo gli è che, nella diuturna lotta contro la deficienza di spazio, che ogni giorno sostiene chi ha l'onore di dirigere questo periodico, egli deve in questa circostanza dichiararsi soccombente.

G. L.

Digitized by Google

G. ROBIN. *Oeuvres scientifiques* réunies et publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par L. Raffy. — *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée du nombre.* Paris, Gauthier-Villars, 1903, 8.° p. VI + 215.

Questo opuscolo postumo, compilato da Raffy in base a note raccolte dalla bocca dell'autore, contiene gli elementi della teoria delle funzioni di variabili reali e del calcolo infinitesimale: funzioni d'una e di più variabili, continuità, derivate, integrali, serie a termini variabili, serie di potenze, integrali improprî, funzioni implicite. Ciò che lo distingue dalle opere congeneri è il principio adottato dall'autore, ed espresso anche nel titolo, di svolgere l'analisi in base al solo concetto di numero razionale. La differenza però è più formale che effettiva; giacchè, mentre noi sin da principio conveniamo che, ogniqualvolta parleremo di un numero irrazionale, penseremo una successione convergente di numeri razionali (o una coppia di classi di numeri razionali), il nostro autore si trascina dietro per tutto il libro visibilmente l'incomodo codazzo di queste successioni convergenti. Il più curioso poi è che, mentre egli intenderebbe con ciò di raggiungere il massimo rigore, riesce invece a mutare — almeno nella forma — la scienza nostra in quella che Klein (v. *Bollettino*, 1903, p. 103) chiama *matematica d'approssimazione*. Basti citare la definizione di somma d'una serie (p. 32): « Dans chaque problème où interviendra une pareille série, « on n'aura besoin de connaître la somme de ses premiers termes « qu'avec une certaine approximation donnée N^{-1}. On appelle *somme* « *de la série* et l'on désigne par un seul et même symbole S l'une « quelconque des sommes S_n, S_{n+1} .... Au contraire, aucune somme « d'indice $< n$ ne devra être appelée somme de la série ».

E crediamo inutile aggiungere altre parole.

G. VIVANTI.

Programmes du 31 Mai 1902. Notions de mathématiques par J. TANNERY. *Notices historiques par* P. TANNERY. *Classe de philosophie, certificat des sciences physiques, chimiques et naturelles*, etc. Paris, Ch. Delegrave, 1903, 8.° p. X + 352.

Un libro scolastico elementare avente per proprio scopo lo svolgimento di un corso che non esiste in Italia, sembra a prima giunta destinato a destare in noi mediocre interesse. Tuttavia crediamo opportuno renderne conto nel nostro *Bollettino* anzitutto perchè l'opera scritta in comune dai fratelli Tannery porge nuova ed indiscutibile prova che non esiste materia per quanto arida e trita che non permetta ad abile mano di comporre col suo mezzo un lavoro istruttivo

Digitized by Google

e divertente quanto può esserlo un libro di letteratura amena. Questo manuale va poi segnalato agli Italiani perchè varie parti di esso (citiamo ad es. il bellissimo Cap. sopra le curve empiriche) potrebbero venire integralmente introdotte in quello speciale corso di matematica che una provvida disposizione di legge ha recentemente incluso fra gli insegnamenti fondamentali per la laurea in chimica. Da ultimo esso merita attenzione e studio da parte di tutti perchè le dotte notizie storiche che racchiude (alle quali non si può muovere che un appunto, il quale suona elogio, di essere cioè un po' troppo concise) indicano chiaramente in qual modo l'elemento storico possa venire introdotto con vantaggio anche nei gradi inferiori dell'insegnamento.

Affinchè chi legge sappia in quali occasioni gli riuscirà utile di ricorrere per consiglio od aiuto all'opera che stiamo annunziando, giova riferire, per supplire al nostro laconismo forzato, l'indice delle materie in essa trattate:

Introduzione.

1. Operazioni fondamentali sopra i numeri interi. - 2. Rapporto di due grandezze. Frazioni ordinarie. Frazioni generalizzate. - 3. Numeri e grandezze proporzionali. - 4. Frazioni decimali. - 5. Numeri relativi; operazioni fondamentali sopra questi numeri. - 6. Numeri algebrici. - 7. Equazioni. - 8. Geometria piana. - 9. Geometria solida. - 10. Metodi di trasformazione geometrica elementari.

Cap. I. *Alcune identità.*

Cap. II. *Algebra geometrica.*

Cap. III. *Equazioni di secondo grado.*

Cap. IV. *Nozioni di geometria analitica.* — 1. Linee rette. Moto uniforme. - 2. Rappresentazione grafica di alcune funzioni semplici. - 3. Metodi grafici per la risoluzione delle equazioni numeriche. - 4. Equazioni di alcune curve definite geometricamente.

Cap. V. *Tangenti, velocità derivate.* — 1. Tangenti determinate geometricamente. - 2. Tangenti determinate analiticamente. - 3. Derivate.

Cap. VI. *Nozioni di calcolo integrale.* - 1. Determinazione di alcune aree. - 2. Nozioni di calcolo integrale. - 3. Volumi.

Cap. VII. *Limiti, infinitesimi, integrali definiti, serie.* — 1. Limiti. 2. Infinitesimi. - 3. Integrali definiti. 4. Serie.

Notizie storiche. — I. Origine dell'algebra. - II. Significato che avevano presso i Greci le parole *analisi* e *sintesi* (1); la loro algebra

(1) Si trovano qui esposte in compendio alcune osservazioni originali che P. Tannery fece conoscere in una dotta conferenza tenuta nell'Aprile 1903 al Congresso storico di Roma.

Digitized by Google

geometrica. - III. Quantità positive e negative. - IV. Le curve studiate dagli antichi. - V. Origine dell' uso delle coordinate per la rappresentazione grafica della variazione dei fenomeni. - VI. Sulla origine del calcolo infinitesimale. G. L.

G. CANDIDO. *La formola di Waring e sue notevoli applicazioni.* Lecce, R. Tip. Salentina, 1903, p. VII+63.

Il nome di *formola di Waring* vien dato di consueto a quella che insegna ad esprimere la somma delle potenze simili delle radici di un' equazione algebrica qualunque, in funzione dei coefficienti di questa. Ma l'A. (che pure insegna quale sia e come si dimostri tale formola generale) considera di preferenza il caso particolare corrispondente all' ipotesi che l' equazione data sia quadratica; in allora la formola di Waring mostra in qual modo $a^m + b^m$ sia esprimibile in funzione di $a + b$ e di ab: e tale elegantissima espressione (1) è suscettibile di sì importanti applicazioni, anche nelle parti elementari della matematica, che l'A. ha creduto (e non a torto) fosse il caso di esporre queste completamente e metodicamente in un opuscolo speciale. Così ebbe vita, la pubblicazione che ora annunciamo. La quale è destinata a servire di complemento agli ordinari trattati elementari di algebra e va raccomandata ai licenziandi dei nostri Licei ed Istituti tecnici, nonchè agli studenti del primo anno universitario. I molti esempi di cui essa è ricca serviranno ad essi di incitamento a lavoro individuale, mentre le numerose indicazioni bibliografiche di cui è adorna li avvieranno a ricorrere alle fonti a cui attinse l'A. stesso.

G. L.

H. SCHUBERT. *Elementare Berechnung der Logarithmen; eine Ergänzung der Arithmetik-Bücher.* Leipzig, Göschen, 1903, 8.°, p. 87. [Prezzo Mk. 1,60].

In tutte le scuole medie s' insegna l'uso delle tavole di logaritani; perciò tutte le persone istruite sanno che cosa sia una tavola di logaritani e di quale utilità essa torni in ogni sorta di calcoli numerici. Invece pochissimi riescono a sapere in qual modo furono costruite tali tavole e nemmeno come si possono calcolare quattro o cinque decimali del logaritmo d'un dato numero. Ciò dipende dal fatto che i logaritani si calcolano di consueto mediante la serie logaritmica, la cui conoscenza è riserbata a coloro che fecero studi superiori. Per

(1) Lagrange giudicò opportuno farne speciale menzione della Nota XI del suo *Traité de la résolution des équations numériques.*

Digitized by Google

ciò il nuovo libretto dell'egregio Professore di Amburgo soddisfa un bisogno universalmente sentito, giacchè insegna in qual modo, col solo sussidio dell'algebra elementare e del teorema del binomio, possono ottenersi due numeri uno maggiore e minore l'altro del logaritmo di un numero assegnato, e di cui inoltre la differenza non superi i milionesimi. Lo stile chiaro in cui è scritto e le sue modeste proporzioni lo renderanno ben accetto anche da coloro che si spaventano davanti a ragionamenti complicati e ad opere ponderose.

G. L.

O. REICHEL, *Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie.* Mit 30 Figuren im Text. Leipzig, Teubner 1904 8.° p. X + 111. [Prezzo del vol. leg. Mk. 2,10].

A fondamento della moderna analisi e della sua applicazione alla geometria si trovano alcuni importanti concetti, strettamente legati alle nozioni di *limite* e di *funzione*, che vennero rigorosamente stabiliti nell'ultimo quarto del Sec. XIX. Diffonderne la conoscenza nelle scuole è lo scopo della presente operetta; tale scopo (il lettore lo ravviserà di primo acchito) presenta una somiglianza profonda con quello propostosi dal Prof. Pincherle in un opuscolo che a suo tempo annunciammo (v. *Bollettino* IV, 1901, p. 14). Senza diffonderci in una completa analisi dell'operetta del Reichel o in un esauriente paragone fra essa e quella del Pincherle, noteremo soltanto che l'A. scende a particolari molto minuti e con molteplici esempi si sforza e riesce a fare luce completa sopra la materia trattata; il suo stile è estremamente stringato, onde è riuscito a racchiudere in breve spazio una considerevole somma di cognizioni utili ed interessanti.

G. L.

E. JOUFFRET. *Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et Introduction à la géométrie à n dimensions.* Paris, Gauthier-Villars 1903, 8.° p. 4, XXX + 215.

L'A., ufficiale superiore dell'esercito francese, attualmente a riposo, dopo di avere occupati i suoi ozi a prendere notizia delle ricerche sinora fatte sulla geometria a *n* dimensioni, si propose di diffonderne la conoscenza fra i propri connazionali. Così ebbe vita il presente libro; il quale, contenendo più enunciati che dimostrazioni, più considerazioni filosofiche che ragionamenti matematici, più figure schematiche che calcoli, non può dirsi un vero e proprio trattato, ma piuttosto una di quelle opere destinate ad eccitare ad uno studio e aiutare chi intende dedicarvisi, fornendogli estese indicazioni bibliografiche.

G. L.

Digitized by Google

W. HAUBER. Statik. I Teil: *Die Grundlehren der Statik starrer Körper.* II Teil. *Angewandte (techn.) Statik.* Sammlung Goschen, 16.° p. 148 ciascuna parte, 1903 e 1904. [Prezzo di ogni vol. leg. 80 Pf.].

Scopo del primo di questi volumetti è quello di porgere, sotto forma concisa ma chiara, una esposizione di quei principî generali di statica che servono di base alla statica tecnica. Perciò comprende, oltre i risultati analitici, quei procedimenti grafici i quali, per la rapidità ed esattezza loro, ottennero già tanto favore tra i pratici. Teoremi e metodi sono stabiliti o svolti coll'aiuto dei mezzi più semplici, e poi illustrati sopra esempi generali o numerici. Tale volumetto — che serve di introduzione al II, destinato alla « Statica applicata » — può riuscire giovevole anche ai nostri studenti, come complemento o riassunto di un ordinario corso di statica. G. L.

ALFRED LOEWY. *Versicherungsmathematik.* Sammlung Goschen N. 180, 16.° p. 145, 1903. [Prezzo del vol. leg. 80 Pf.].

Il presente volume è il terzo che abbiamo avuto occasione di annunziare sull'argomento (v. *Bollettino* II, 1899, p. 103; VI, 1903, p. 51). Esso deve le proprie origine a lezioni universitarie dirette, non solo a matematici, ma anche a giuristi, e concerne i calcoli matematici che intervengono negli affari delle società di assicurazione. E poichè l'importanza di tali affari in tutta la moderna vita civile non ha bisogno di essere dimostrata, così l'operetta del Loewy sembra destinata a destare un largo interesse anche all'infuori del campo degli scienziati. L'A. ben noto nel campo dei matematici puri, si afferma con questa pubblicazione competentissimo anche in un ramo che sembra stare col influente dell'economia politica, del diritto civile e dell'algebra; basti ciò a raccomandare ai nostri lettori il nuovo elemento della bella raccolta Goeschen. G. L.

GUSTAV BAUER. *Vorlesungen über Algebra.* Herausgegeben vom Mathematischen Verein München. Mit dem Bildnis G. Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner, 1903, gr. 8; p. VI+376. [Prezzo del volume legato Mk. 13].

Festeggiandosi nel 1900 l'ottantesimo anniversario del Prof. G. Bauer dell'Università di Monaco, il « Mathematischer Verein München », costituito dagli studenti di quella Università e di quella Scuola politecnica, ad onorare il Maestro tuttora vegeto ed operoso, volle assumere la pubblicazione delle lezioni di Algebra, che egli aveva ripetutamente svolto a quella Università dal 1870 al 1897, a intervalli di due o tre anni. Il manoscritto, destinato a riprodurre fedelmente

Digitized by Google

le lezioni quali venivano dette nella scuola, fu preparato, per cura del « Verein » medesimo, sulla base di appunti scolastici, e fu poi riveduto dallo stesso autore.

Il corso, indirizzato agli studenti del primo o del secondo anno di studio, aveva solitamente la durata di due semestri, nel primo dei quali veniva svolta la teoria generale delle equazioni, nel secondo la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche e la teoria e le applicazioni dei determinanti. Questa disposizione della materia, conservata anche nel libro, se non traesse origine, come è avvertito nella prefazione, da ragioni di indole pratica, riuscirebbe inesplicabile. Il Prof. Doehlemann, che ebbe a curare la pubblicazione dell'opera, suggerisce al lettore di invertire per proprio conto l'ordine dei capitoli; ma con ciò si sconnetterebbe la parte sostanziale e caratteristica delle lezioni del Bauer, onde giova meglio considerare addirittura la teoria dei determinanti come un'appendice indipendente e accessoria dalle altre tre parti, che insieme con quella costituiscono queste lezioni.

Nella prima parte (« Proprietà generali delle equazioni algebriche ») dopo le consuete generalità e il teorema fondamentale, di cui è esposta, con lievi modificazioni, la dimostrazione dell'Argand, è dato un particolare sviluppo alla teoria delle funzioni simmetriche e a quella della eliminazione, con un cenno abbastanza diffuso della memoria del Poisson sulla eliminazione di due o più variabili; e l'una e l'altra teoria vengono da ultimo applicate ai problemi di trasformazione.

La seconda parte è dedicata alla « Risoluzione algebrica delle equazioni ». Dopo la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado e la teoria delle equazioni reciproche e binomie, vien dimostrata secondo la classica memoria di Abel la impossibilità di risolvere con radicali le equazioni generali di grado superiore al 4°. Trova quindi posto un cenno della teoria del Galois, e, dopo una necessaria digressione di teoria dei numeri, vengono studiate le equazioni abeliane e da ultimo, dal punto di vista della loro risolubilità algebrica, le equazioni binomie.

La terza parte tratta diffusamente della « Risoluzione numerica delle equazioni » e, oltre a' metodi più consueti, contiene i teoremi di Cauchy e Sturm sulla ricerca delle radici complesse e una esposizione completa del metodo di Graeffe, coi perfezionamenti di Encke.

Come già si disse, vien da ultimo una quarta parte sulla teoria dei determinanti e le sue applicazioni alle equazioni lineari, ai problemi di eliminazione e alla riduzione delle forme quadratiche e bilineari; e il libro si chiude con due note, la prima sulle frazioni continue e gli irrazionali quadratici, la seconda su di una formola del Lagrange per la somma delle potenze n^{ms} delle radici di un'equazione di 2° grado, che trova applicazione nella teoria delle equazioni reciproche.

Sarebbe altrettanto facile quanto inutile enumerare qui minutamente

Digitized by Google

le mancanze di esattezza e i non rari difetti di inutile prolissità o di ingiustificata concisione, che nel volume sono infiltrati certamente traverso gli appunti, da cui esso ebbe origine; e tanto meno conviene insistere su questo punto, in quanto le stesse ragioni, che occasionarono codeste piccole mende, diedero per altro lato al libro quell'andatura piana e snella, che è caratteristica delle lezioni orali. — Piuttosto gioverà ricordare la copia di esempi numerici, semplici e significativi, con cui l'A. illustra e spesso completa le singole teorie. Ed è pur notevole il carattere e l'atteggiamento particolare, che a queste lezioni derivano dalla tendenza che ha l'A. ad ispirarsi direttamente e quasi esclusivamente, nella sua esposizione teorica, alle memorie classiche del Poisson, del Lagrange, dell'Abel, del Galois, del Cauchy; permodochè, se in qualche punto ne discende qualche discontinuità di metodo o di vedute, per compenso le geniali concezioni di quei sommi vengono presentate sotto il loro aspetto genetico e quasi direi in uno stato nascente, che sulle giovani menti cui per la prima volta si presentino queste teorie deve certamente agire come impulso e come stimolo alla elaborazione e alla ricerca personale.

UGO AMALDI.

E. PASCAL. *I gruppi continui di trasformazioni* (Parte generale della teoria). Manuale Hoepli. Milano, 1903. XI-358 p. 8°.

In questi ultimi tempi è invalso in Germania l'uso di esporre le nuove teorie che ivi hanno la loro culla in ampie e voluminose opere; uso che, se da un lato è lodevole perchè offre agli studiosi provetti un quadro completo di tali teorie, presenta dall'altro il gravissimo inconveniente di renderle poco meno che inaccessibili ai giovani. Mettete infatti davanti ad uno che sia al principio della sua carriera scientifica le 3000 pagine delle opere (non ancor finite) di Klein-Fricke sulle funzioni modulari ed automorfe, o le 4000 dei trattati di Lie, Engel e Scheffers sui gruppi di trasformazioni, e lo vedrete completamente disorientato. Non già che quei libri sieno di difficile lettura, o che esigano molte cognizioni speciali; chè anzi, se il nostro giovane lettore si deciderà ad affrontarli, riuscirà senza molta fatica a comprenderne ogni punto. Però, giunto alla fine, si domanderà: Quali sono, nella teoria di cui ho appreso tutti i particolari, gli elementi principali, quali gli accessori? Qual è lo scheletro, la spina dorsale di essa? Qual è la connessione tra le varie sue parti, quale il legame con altre discipline matematiche? E a tutte queste domande, a meno che non sia dotato d'una intelligenza eccezionalmente forte e sintetica, difficilmente saprà trovare risposta.

Sarebbe pertanto necessario che, accanto a queste opere-enciclopedie,

Digitized by Google

di cui non può certo negarsi l'utilità e l'importanza, sorgessero altre opere, di mole assai minore e di pretese ben più modeste, destinate a servire di propedeutica, di preparazione ad un ulteriore e più profondo studio, dove nella forma e nell'ordine didatticamente migliori fossero esposti i tratti fondamentali delle nuove teorie. Questo scopo appunto si propose chi scrive nei suoi corsi, pubblicati in litografia, del 1897-98 sui gruppi di trasformazioni (stampato appunto ora, tradotto in francese, dall'editore Gauthier-Villars), del 1901-02 sulla teoria dell'icosaedro, e dell'anno corrente sulle funzioni modulari. Più tardi, sulla teoria di Lie, è uscito un opuscolo del prof. Giudice (*Nozioni sulle trasformazioni puntuali e sui gruppi continui*, Brescia, 1898), ed ora ci sta dinanzi un volume del prof. Pascal, che viene ad accrescere di un ottimo elemento l'importante serie dei *Manuali Hoepli*. Esso contiene tutte le parti più essenziali del primo volume delle *Theorie der transformationsgruppen* di Lie-Engel, ed inoltre i principii della teoria delle equazioni pfaffiane. L'esposizione è, in generale, conforme all'opera di Lie; però sono inserite a suo luogo le ricerche originali dell'autore sull'argomento, ricerche che furono pubblicate in questi ultimi anni in vari periodici ed atti accademici, e che in gran parte fanno capo alla formola per il prodotto di due trasformazioni finite, mercè la quale si ottengono in vari punti notevoli semplificazioni. Tuttavia l'originalità del libro sta principalmente nell'ordine della materia, la quale è disposta in modo nuovo e tale da porre meglio in luce l'architettura della teoria. I cinque capitoli nei quali essa è distribuita contengono rispettivamente la teoria generale dei gruppi di trasformazioni, la teoria dell'invariantività rispetto ad un gruppo, le proprietà relative alla costituzione dei gruppi (transitività, primitività, sistaticità, isomorfismo), lo studio dei gruppi aggregati ad un gruppo dato (gr. aggiunto, gr. di struttura, gr. parametrico, gr. di imprimitività, gruppi ampliati, gr. reciproco), e la teoria invariantiva dei gruppi ampliati. — Un volume successivo tratterà delle trasformazioni di contatto.

Per finire, ci associamo all'augurio dell'autore, che il suo lavoro dedicato ai giovani studiosi possa contribuire al progresso dei loro studi.

G. Vivanti.

J. Kübler. *Die Proportion des goldenen Schnitts als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung.* Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. 8.° p. 36. Leipzig, Teubner, 1903. [Prezzo Mk. 1,60].

Le doti estetiche della divisione in media ed estrema ragione vennero avvertite da un popolo eminentemente artistico dell'antichità:

Digitized by Google

lo provano molti edifici greci anteriori all'epoca di Pericle. Le molteplici questioni geometriche in cui essa interviene colpirono la fantasia di Luca Paciuolo, il quale le diede il nome di *divina proporzione* e ne fece soggetto di un lavoro speciale. Che tale entusiasmo sia stato diviso da un matematico di poco posteriore - Oronzio Fineo -, il quale credette ravvisare in essa il mezzo per risolvere le più ardue questioni matematiche e ne celebrò in un distico latino le sorprendenti prerogative, non recherà meraviglia a chi tenga il debito conto del livello raggiunto nel Sec. XVI dalla cultura scientifica. Ma che nel Sec. XX un architetto tedesco tributi all'aurea proporzione un'ammirazione non meno ardente e creda prezzo dell'opera dedicarvi un lavoro *ad hoc* è un fatto che ci sembra molto strano e che, come tale, merita di venire segnalato ai lettori nostri. Se di siffatto lavoro noi diamo il semplice annuncio, gli è quanto di matematico esso contiene è noto dagli elementi della geometria ed il resto non è di nostra competenza.

G. L.

C. H. Müller *und* O. Presler. *Leitfaden der Projektionslehre. Ein Uebungsbuch der konstruirenden Stereometrie.* Ausgabe A: vorzugweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Mit 233 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1903. 8.° p. VIII + 320. [Prezzo del vol. leg. Mk. 4].

I procedimenti propri della geometria descrittiva, se dal punto di vista teorico presentano vivo interesse — sia perchè offrono belle applicazioni di molte teorie, sia perchè rendono più agevole il concepire e lo studiare le più complicate figure solide — sono assai spesso indispensabili a chiunque si occupi di certe scienze naturali od applicate. Ond'è che se vi è campo in cui possa assai utilmente svolgersi una ben intesa popolarizzazione è quello in cui Monge è riconosciuto come sovrano. Tale opera è tanto più possibile e consigliabile in quanto che i fondamenti della projezione parallela (ortogonale o non) non esigono per essere intesi una profonda cultura matematica. Va dunque data lode ai Prof.ri C. H. Müller e O. Presler di averla tentata; e, aiutati in ciò da un'intelligente casa editrice, di avere arricchita la letteratura matematica di un ottimo scritto che insegna, a chiunque conosca i primi elementi della geometria, il modo di disegnare razionalmente ed esattamente cristalli e macchine, edifici ed appezzamenti di terreno. Quando avremo aggiunto che gl'insegnanti di geometria descrittiva troveranno in essa un'estesa collezione di utili e interessanti applicazioni, avremo elementi sufficienti per concludere come nessun cultore delle scienze fisico-matematiche abbia il diritto di considerare estranea ai propri studi l'opera di cui diamo l'annunzio.

G. L.

Digitized by Google

E. Borel. *Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. Leçons sur les fonctions méromorphes* professées au Collège de France, recueillies et rédigées par L. Zoretti. — Paris, Gauthier-Villars, 1903. VII-122 p. 8°.

In questo volume, che è il quinto di quelli che Borel dedica alla teoria moderna delle funzioni, si rendono, come è naturale, più che nei precedenti, sensibili le conseguenze del sistema adottato dall'autore di mantenere i diversi volumi tra loro indipendenti, sistema che, se, sotto certi punti di vista, è buono, obbliga però a ripetizioni ed a sviluppi che sarebbe utile evitare, specialmente in libri di piccola mole. Ed infatti, delle 104 pagine che compongono il testo del presente opuscolo, venti (p. 1-20) sono dedicate alla ripetetizione di cose già note anche dai volumi precedenti — principii della teoria delle funzioni analitiche, formola di Cauchy, teoremi di Mittag-Leffler e di Weierstrass, definizione del raggio di convergenza, teorema di Cauchy-Hadamard —, ed altre quattordici (p. 48-61) all'esposizione, con nuovo metodo, delle generalizzazioni del teorema di Picard per le funzioni intere di ordine finito. Ciò, s'intende, non diminuisce affatto il valore del volume, la cui lettura è altrettanto interessante e suggestiva che quella dei precedenti.

Il presente volume consta di 4 Capitoli.

Il Cap. I — *Teorema di Mittag-Leffler* — contiene, come si è già detto, cose entrate ormai nel dominio comune, e sulle quali è quindi inutile arrestarci.

Nel Cap. II — *Serie di Taylor* —, dopo la definizione di raggio di convergenza e la dimostrazione del teorema di Cauchy-Hadamard, viene esposta la ricerca dei poli delle funzioni con un metodo alquanto più semplice di quello di Hadamard, e dai risultati ottenuti si deducono alcuni notevoli teoremi, fra i quali vogliamo citare il seguente: « Una funzione meromorfa in un cerchio di raggio $\rho > 1$ col centro » nell'origine non può avere come elemento relativo all'origine una » serie a coefficienti interi senza ridursi al quoziente di due polinomi » a coefficienti interi ». — Merita di essere osservato che la condizione $\rho > 1$, la quale potrebbe parere di poca importanza e facile a togliersi, è invece del tutto essenziale; infatti, data una funzione meromorfa in un cerchio di raggio $\rho < 1$ (col centro nell'origine), può sempre trovarsi una funzione avente le stesse singolarità entro quel cerchio e il cui elemento relativo all'origine sia una serie a coefficienti interi.

Dallo studio dei poli d'una funzione meromorfa può farsi dipendere immediatamente quello degli zeri d'una funzione intera; e su questo argomento Borel giunge appunto ad una formola analoga a quella data da Hadamard per i poli.

Digitized by Google

Il Cap. III — *Teorema di Picard* — tratta anzitutto della generalizzazione di questo teorema per le funzioni intere. Definito poi l'ordine di una funzione meromorfa, l'autore estende a queste funzioni, nel caso in cui l'ordine è finito, il teorema di Picard generalizzato.

Il Cap. IV ed ultimo si occupa delle *Serie di frazioni razionali.* Una espressione della forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\lambda_n}, \qquad (\alpha)$$

dove le A_n, λ_n sono numeri interi e positivi, rappresenta una funzione meromorfa di specie particolare, cioè la derivata logaritmica d'una funzione intera. Può chiedersi se, essendo le A_n qualunque, possa (α) rappresentare ancora una funzione meromorfa; ciò avviene sempre, se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n \lambda_n} z^{\lambda_n}$ è assolutamente convergente per ogni valore di z. Gli sviluppi (α) hanno una grande generalità; giacchè può dimostrarsi che ogni funzione meromorfa d'ordine ρ è la somma d'un tale sviluppo e d'una funzione intera d'ordine $\leqq \rho$, purchè la distribuzione de' suoi poli sia *ordinaria*, cioè purchè i suoi poli non sieno due a due infinitamente vicini. È bene però notare che vi sono anche funzioni semplicissime per cui la distribuzione dei poli non è ordinaria; tale è p. es. $\frac{1}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} \frac{z}{\alpha}}$ per valori opportuni della costante α.

Dopo aver fatto vedere come i suoi metodi possano applicarsi agli sviluppi (α) anche quando questi non rappresentano funzioni meromorfe, l'autore ritorna a queste funzioni, e mostra come per gli sviluppi corrispondenti possano trovarsi certe *curve di convergenza,* ossia linee su cui lo sviluppo considerato è equiconvergente, e come a tali curve possa estendersi la formola di Cauchy. Ne risulta che, se lo sviluppo è nullo su tutte le curve di convergenza, lo è in tutto il piano.

Alcune delle cose dette sussistono anche per le serie di frazioni razionali qualunque, cioè non decomposte in elementi semplici.

Il volume termina con 4 note destinate ad una breve esposizione di alcune importanti ricerche recentissime dovute a varii autori.

La 1.ª riassume i risultati di Lindelöf concernenti i rapporti tra il modo di crescere del modulo di una funzione intera e quello dei suoi zeri.

La 2.ª contiene un cenno su una nota di Boutroux in cui è indicato il modo di trovare due funzioni intere di genere $p-1$ la cui somma sia di genere p.

La 3.ª dà una formola stabilita da von Koch pel calcolo della

Digitized by Google

somma dei residui dei poli d'una funzione contenuti in un cerchio col centro nell'origine.

Infine la 4.ª accenna agli studii di Maillet intorno alle funzioni *quasi-intere*, cioè con un numero finito di punti singolari essenziali, e *quasi-meromorfe*, cioè con un numero finito di punti singolari essenziali e con infiniti poli.

G. VIVANTI.

S. CATANIA. *Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori.* Catania, N. Giannotta, 1904 [Prezzo L. 1,60].

L'A. dichiara, nella prefazione, di aver voluto *tradurre, volgarizzare* e rendere più adatta per le *attuali* scuole, una parte dell'*Aritmetica generale ed Algebra elementare* del Prof. PEANO (Torino, Paravia, 1902). — La traduzione nel linguaggio comune delle formole simboliche presenta due notevoli pericoli: enunciare proposizioni che, se hanno importanza e necessità simbolica, appariscono ovvie nelle forme usuali: dare alle proposizioni forma o troppo arida o troppo prolissa per conservare la precisione dei simboli. Ma l'A. ha saputo, con molta abilità, e sempre con molta eleganza, evitare i due pericoli non sacrificando la precisione alla forma. Sotto tale aspetto l'opera dell'A. è molto importante, quando si osservi che i libri comunemente adottati sacrificano troppo spesso la precisione alla forma tradizionale. — Nè meno importante è lo scopo propostosi dall'A. di *volgarizzare* una serie di studi che hanno fatto raggiungere alla matematica elementare un notevole grado di rigore e di semplicità, ma che sono poco adoperati dagli *attuali* docenti, o perchè essi si credono obbligati a seguire altri indirizzi, o perchè non hanno saputo vedere nei moderni studi altro che uno sfogo di mania logico-simbolica. — Una serie di ben scelti e ben ordinati esercizi rende il libro praticamente adatto alla scuola. — L'A. a pag. 137 introduce, per i *numeri relativi*, gli ordinari termini *monomio*, *binomio*, *trinomio*, ..., nell'usuale significato. Sarebbe stato bene fare osservare che tali termini *coincidono tutti* col termine *numero* (relativo): invero; la somma di n numeri è un numero, e ogni numero è somma di n numeri. I termini ora indicati esprimono semplicemente una *forma di scrittura;* così ad es., la forma di scrittura di $a+b+c$ è un *trinomio* e la forma di scrittura di $a+(b+c)$ è un *binomio*, e non si presenta più l'assurdo che un trinomio sia ad un tempo binomio (in infiniti modi) e monomio.

C. BURALI-FORTI.

Digitized by Google

A. KRAZER. *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Leipzig, Teubner, 1903, 8.° p. XXIV+509 (T. XII della Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften).

Di un' opera come questa era sentito il desiderio; ben pochi meglio del Krazer, specialista in materia, avrebbero potuto scriverla. Essa ci presenta un' esposizione sistematica e completa della teoria delle funzioni θ, corredata da estese notizie storiche e bibliografiche.

Ecco un breve sommario degli argomenti dei varî Capitoli:

Parte I. *Funzioni θ generali con caratteristiche qualunque.* — Cap. I. Definizione e proprietà fondamentali delle funzioni θ di 1.° ordine e d'ordine superiore; caratteristiche. - Cap. II e III. Due metodi per la trasformazione delle serie multiple, e loro applicazione alle funzioni θ. - Cap. IV. Costruzione delle funzioni generali a $2p$ periodi mediante le funzioni θ, e loro proprietà. - Cap. V. Trasformazione delle funzioni θ. - Cap. VI. Moltiplicazione complessa.

Parte II. *Funzioni θ generali con caratteristiche razionali.* — Cap. VII. Caratteristiche col denominatore comune 2. - Cap. VIII. Caratteristiche con denominatori qualunque.

Parte III. *Funzioni θ speciali.* — Cap. IX. Funzioni θ abeliane. - Cap. X. Funzioni θ iperellittiche. - Cap. XI. Integrali abeliani riducibili e funzioni θ relative.

G. VIVANTI.

G. VIVANTI. *Lezioni sulla teoria delle funzioni modulari raccolte dagli studenti. — Corso di matematiche superiori dell'anno 1902-1903.* — Reggio-Calabria, Litografia Massara, 1903, 8.° p. 264.

Introduzione.

Parte I. *Teoria delle funzioni di una variabile complessa.* — Connessione delle superficie. Derivate ed integrali delle funzioni di una variabile complessa. Funzioni razionali e loro integrali. Funzioni algebriche. Integrali abeliani. Problemi d'esistenza.

Parte II. *Teoria del gruppo modulare.* — Sostituzioni lineari. Gruppi di sostituzioni. Gruppo modulare. Il sottogruppo $\Gamma\sigma$. Studio dei sottogruppi possibili. Studio dei sottogruppi realmente esistenti. Ricerca dei sottogruppi $G\mu_{(p)}$, dove p è primo.

Parte III. *Teoria delle funzioni modulari.* — Invarianti di una forma biquadratica. Periodi dell'integrale ellittico di 1.ª specie. Le funzioni modulari principali. Esistenza delle funzioni modulari. Risolventi dell'equazione modulare. Alcuni esempi di costruzione effettiva di funzioni modulari e di risolventi.

Digitized by Google

NOTIZIE

Leopoldo Gegenbauer nacque ad Asperhofen, vicino a Neulengbach (Bassa Austria), il 27 Febbraio 1849. Dal 1858 percorse, durante otto anni, con somma lode, gli studi secondari nel Ginnasio di Krems e nell'Autunno del 1866 si recò all' Università di Vienna, ove ebbe a maestri di matematica e fisica il Petzval, il Weiss, il Lang, il Boltzman e lo Stefan. Nel Luglio 1869 si schierò fra i candidati all' insegnamento e il 17 Novembre dello stesso anno conseguì la desiderata abilitazione ad insegnare; e fu subito ammesso a fare il prescritto anno di prova nel Ginnasio di Vienna. Il 1.° Dicembre 1870 fu nominato supplente al Ginnasio comunale di Waidhofen ed il 1.° Marzo seguente supplente per la lingua francese alla Scuola reale superiore di Krems. In tale istituto ebbe poi (30 Marzo 1873) il posto di professore di matematica e fisica e lo tenne, almeno nominalmente, sino al termine dell' anno scolastico 1874-75; ci esprimiamo così perchè nei due anni 1873-74 e 1874-75 gli fu concesso un assegno di perfezionamento all' estero, ed egli ne profittò per recarsi a Berlino a seguire le lezioni di Weierstrass e Kronecker, di cui divenne ammiratore e seguace. Ritornato in patria ebbe (6 Settembre 1875) la cattedra di matematica e fisica nella Scuola reale superiore di Wiener-Neustadt, ma non la occupò, perchè poco dopo (26 Settembre 1875) fu chiamato, in qualità di professore straordinario, all' Università allor fondata a Czernowitz; ivi nel 1879 gli fu conferita la laurea dottorale. Ma già un anno prima (28 Ottobre 1878) era stato chiamato ad Innsbruck a succedere al Bauersgarten.

Nell' inverno 1878-79 ottenne un permesso per recarsi a Roma e nel 1881 fu promosso ordinario. Dopo un soggiorno di 15 anni nel capoluogo del Tirolo, il Gegenbauer accettò l'offerta fattagli (7 Luglio 1893) di succedere al Petzval nella cattedra che questi occupava nell' Università di Vienna. Nella capitale dell' impero austro-ungarico il nostro matematico occupò con plauso molti importanti uffici governativi, collegati alla pubblica istruzione ed agli istituti di assicurazione. Ma tale eccesso di lavoro stava per produrre i più deplorevoli effetti; infatti addì 7 Giugno 1902 veniva colpito da un attacco apoppletico durante una seduta di facoltà; le sapienti ed indefesse cure della famiglia gli permisero di riaversi, ma solo per poco, chè il 3 Giugno dell' anno seguente morì fra l'universale compianto.

Digitized by Google

Le pubblicazioni del Gegenbauer, secondo il calcolo dello Stolz (1), ammontano a 175; le più antiche concernono le funzioni sferiche e cilindriche, le altre elevate questioni aritmetiche.

* * *

QUESTIONE DI STORIA DELL'ASTRONOMIA proposta dalla R. Accademia danese delle Scienze e Lettere.

« Nel 1910 saranno compiuti 200 anni dalla morte di O. Römer. In occasione di tale anniversario l'Accademia vorrebbe che, prima di esso, venisse raccolto il maggior numero di dati sull' attività tanto feconda ed estesa di O. Römer nel campo delle scienze esatte. Il di lui discepolo P. Horrebow ha indubbiamente dato dei lavori del maestro un'esposizione profonda, basata in parte sopra alcuni manoscritti di Römer sfuggiti nel 1728 all' incendio di Kopenhagen, ed in parte sopra materiali già estratti fatti dall' Horrebow dai manoscritti stessi prima dell' incendio, nonchè sopra ricordi personali. documenti vari, pubblicazioni, carteggio con Römer ecc. Aggiungiamo che d' altronde noi abbiamo sulla biografia di quel dotto e sulle varie regioni in cui si è manifestato il suo genio ed il suo senso pratico delle pubblicazioni fatte da altri punti di vista e fondate sopra materiali attinti ad altre fonti. Ciò non ostante non è in alcun modo impossibile, con le risorse offerte dalle biblioteche moderne, di scoprire delle fonti sino ad oggi ignote ed in particolar la corrispondenza. Per porre la mano sopra documenti atti ad illuminare la personalità scientifica del Römer, il metodo migliore sarà di cercare altre notizie che le biblioteche possano contenere sopra la vita di quello scienziato ed il campo così vario della sua attività.

Per ciò l'Accademia propone il tema seguente: *Nuovi contributi alle cognizioni sopra la biografia di O. Römer e la sua moltiplice attività, insistendo naturalmente sopra le sue opere scientifiche* ».

Premio: medaglia d'oro dell'Accademia. Scadenza 31 Ottobre 1905.

* * *

DELLA PORTATA OBBIETTIVA DEL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ trattò P. Mansion nel Discorso da lui pronunziato in qualità Presidente dell'Accademia del Belgio il 16 Dicembre 1903. Ivi l' illustre autore, con vasta dottrina e fine critica, espose la storia, i concetti fondamentali e le varie applicazioni di quel calcolo, riuscendo a dilettare coll' istruire: sicchè la lettura di esso va consigliata ad ogni persona

(1) V. la necrologia del Gegenbauer, pubblicata nel T. XV dei *Monatshefte für Math. und Phys.*, ed a cui largamente attingemmo nello scrivere il presente cenno.

Digitized by Google

colta, desiderosa di apprendere ciò che fu e ciò che è un ramo dello scibile ove convergono le matematiche sublimi e le scienze sociali e politice.

***

TEMA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DI MADRID. « Studio completo di una classe particolare di integrali singolari, nascenti da quelle equazioni differenziali in cui i valori delle derivate risultano indeterminate quando fra le variabili si stabiliscano speciali relazioni ». Le memorie dei concorrenti devono essere scritte in castigliano od in latino e prevenire al segretario di quell'Accademia entro il 31 Dicembre 1905.

***

IL II VOL. DEI RESOCONTI DELLA SOCIETÀ MATEMATICA DI BERLINO contiene lavori di Fürle, Güntsche, Hamburger, Hessemberg, Jahnke, Knoblauch, Koppe, Kötter, Landau, Lampe, Rothe e Steinitz.

***

BIBLIOTECA SCOLASTICA. Burali-Forti C., *Lezioni di aritmetica pratica.* 3.ª ed. riordinata, Torino, Petrini, 1904, pagine VIII+282 (Prezzo L. 2).

Burali-Forti C. e A. Ramorino, *Elementi di algebra per le Scuole medie inferiori.* II ed. interamente rifatta. Torino, Petrini, p. 155 (Prezzo L. 1, 75).

Wienecke E., *Der geometrische Vorkursus in schulgemässer Darstellung. Mitreichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten zum Gebrauch an allen Lehranstalten.* Leipzig und Berlin, Teubner, 1904 [È una specie di geometria intuitiva !].

Pfeiffer E., *Physikalisches Praktikum für Anfänger, dargestellt in 25 Arbeiten.* Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. Leipzig, Teubner, 1903 [Prezzo Mk. 3, 60].

Geissler K. *Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde. Zum Selbststudium und zur Unterstützung des Unterrichts.* Mit 52 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1904 [Prezzo Mk. 3].

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE. A. Favaro, *Serie XIV di Scampoli galileiani* (Atti e Memorie della R. Acc. di Padova, T. XX, 1904).

» *Amici e corrispondenti di Galileo*, X. G. B. Agucchi. (Atti del R. Istituto Veneto, T. LXIII, 1902-03).

» *Intorno al presunto autore della « Aritmetica pratica compilatio » edita da M. Curtze.* (Id. ib.).

Digitized by Google

***

BIBLIOGRAFIA DEI DETERMINANTI. Nel I Vol. (Aprile 1903) del « Report of the South African Association for the Advencement of Science » si trova *A third list of writings on determinants* del Muir, che, con le due prime (inserite nei Volumi XVIII e XXI del *Quarterly Journal of Mathematics*), abbraccia non meno di 1774 titoli. Essa si chiude con un elenco alfabetico completo dei nomi citati, che renderà agevole qualunque ricerca bibliografica sopra il più recente, ma non il meno importante, dei rami dell' aritmetica generale.

***

GIORGIO GABRIELE STOKES nacque il 13 Agosto 1819 a Streen nella contea di Sligo (Irlanda); compiuti gli studi secondari a Dublino ed a Bristol, nel 1837 fu ammesso al Collegio Pembroke di Cambridge e nel 1841 riuscì primo (*senior wrangler*) nella grande gara che in Inghilterra chiamano *mathematical tripos*, avendo a competitori il Cayley e l'Adams. Un antico, fedele, illustre amico dello Stokes, W. Thomson, rievocando i propri ricordi di giovinezza ha narrato che verso il 1840 nessun gabinetto di fisica esisteva nel collegio di Pembroke e che il primo laboratorio della Gran Bretagna ebbe sede (1840-43) nelle camere allora abitate dal giovane Stokes. — Eletto *fellow* del collegio Pembroke, nel 1857 dovette abbandonare tale ufficio a cagione del suo matrimonio, ma, nuovi regolamenti togliendo l'obbligo del celibato, potè riprenderlo, conservarlo e divenire capo (*master*) di quell'istituto. Nel 1849 ottenne il posto di professore lucasiano nell' Univ. di Cambrige e due anni dopo *fellow* della Società Reale di Londra, di cui poi divenne per un triennio segretario e per un quinquennio presidente. Nel 1899 fu solennemente commemorato il 50.° anniversario della sua nomina alla cattedra fondata da Enrico Lucas; la morte lo colse il 1.° Febbraio 1903. — L' opera scientifica dello Stokes è quella di un perfetto fisico matematico; i risultati di essa si trovano consegnati nelle molte memorie da lui pubblicate, ma anche in lavori tuttora inediti (in tale condizione si trova ad es. il celebre teorema sulle trasformazioni degli integrali che porta il suo nome e che in gioventù gli procurò il premio Smith); essa venne dottamente analizzata in iscritti di Lord Kelvin (*Nature*, 12 febbraio 1903) e del Prof. Volterra (*Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 1.° Maggio 1903), ai quali rimandiamo il lettore desideroso di più estesi e minuti ragguagli.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1904.

Digitized by Google

ANNO VII. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1904.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

Recensioni ed annunzi: KRONECKER, *Vorlesungen über Mathematik*. II. 2. [G. L.]. — MARCOLONGO, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* [T. Boggio]. — ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik* [G. L.]. — CHINI, *Corso speciale* [C. Somigliana]. — WEBER und WELLSTEIN, *Encyklopädie* I [U. Amaldi]. LEBESGUE, *Fonctions primitives* [G. Vivanti]. SELIWANOFF, *Differenzenrechnung* [G. Vivanti]. — GAUSS, *Werke* IX. [G. L.]. — BUCHERER, *Vektor-Analysis* [G. L.]. — I. ALEXANDROFF, *Aufgaben* [G. L.]. — HILBERT, *Grundlagen* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitari: Università di Bologna. Corso di matematiche superiori. 1903-04 (C. Arzelà).

Notizie: III Congresso intern. di matematica. — Tema di concorso proposto dalla Facoltà di Gottinga. — Sulla matematica dei Giapponesi. — Tema proposto dall'Accademia del Belgio. — II Congresso di filosofia. — Tema posto a concorso dal R. Istituto Veneto.

RECENSIONI ED ANNUNZI

L. KRONECKER. — *Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen.* II. Teil. *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, bearbeitet und fortgeführt von* K. HENSEL. II. Abschnitt. *Vorlesungen über Determinantentheorie.* I. Band, mit 11 Figuren im Text. Leipzig. B. G. Teubner 1903, 8° gr., p. XII + 330 [Prezzo Mk. 20].

Di tutte le teorie elementari dell'algebra odierna quella di data più recente è la teoria dei determinanti. I nuovi punti di vista che essa schiude dinnanzi agli occhi dello studioso e le bellissime applicazioni a cui si presta la resero diletta ai più eminenti analisti del secolo scorso, che dimostrarono il loro interesse per essa arrecandovi qualche notevole contributo. Fra le numerose esposizioni che se ne possiedono alcune si accostano tanto alla perfezione che quella teoria sembra una di quelle che meno si prestano ad innovazioni rilevanti;

Digitized by Google

ma il volume che ora ci sta dinnanzi prova che ivi pure il Kronecker poteva avere ed ebbe occasione per manifestare le eminenti sue doti di pensatore originale.

Fra le varie definizioni che vennero proposte pei determinanti il Kronecker sceglie quella che sembra emergere per ispontaneità e raccomandarsi dal punto di vista didattico, ed è anche la più antica che si conosca; è quella che nasce considerando tali enti analitici siccome provenienti dalla risoluzione di un sistema determinato di equazioni lineari. Ma per dare un'idea almeno approssimativa del modo in cui egli la svolge è indispensabile analizzare, sia pur brevemente, il variopinto contenuto delle 22 lezioni che ci stanno sott'occhio.

I. Secondo il lodevole costume a cui egli si è sempre attenuto, il Kronecker esordisce col tracciare a grandi linee la storia della disciplina che si propose d'insegnare; comincia quindi a notare i cenni più o meno chiari ed espliciti che di determinanti si trovano nelle opere di Leibniz, Cramer, Vandermonde, Lagrange e Gauss, i quali tutti se ne occuparono grazie alle applicazioni di cui sono suscettibili. Ma nota che gli è con Jacobi e Cauchy che il loro studio diviene scopo a sè stesso. Poco dopo Brioschi e Baltzer, con i loro giustamente celebri trattati, la resero popolare; mentre Cayley, Sylvester ed i loro discepoli, intraprendendo lo studio delle loro proprietà invariantive, determinarono l'ultimo momento decisivo che Kronecker ravvisa e segnala nella teoria dei determinanti.

II. Con questa lez. comincia la parte dottrinale del corso; essa ha per iscopo di introdurre alla cognizione dei determinanti di 2.° ordine. A tale scopo Kronecker parte dalle funzioni lineari

$$f = ax + by + c \quad , \quad f' = a'x + b'y + c'$$

e si propone il problema seguente: « quali sono le funzioni dei sei coefficienti $a, \ldots, c'$ che rendono $f = o$, $f' = o$? », o l'altro più generale « quale limitazione viene posta alla variabilità della x, y dalle condizioni $f = o$, $f' = o$? ». Per rispondere egli considera le altre due funzioni

$$F = \alpha f + \alpha' f' \quad , \quad F' = \beta f + \beta' f'$$

e stabilisce le condizioni per l'*equivalenza* del sistema dato al sistema $F = o$, $F' = o$. Scelti $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ in modo che in F non entri y ed in F' non entri x le equazioni $F = o$, $F' = o$, contenendo ciascuna una sola incognita, guidano tosto alla risoluzione delle equazioni proposte. Le formole così nascenti dànno x, y sotto forma di frazioni aventi lo stesso denominatore ed i cui termini sono funzioni del medesimo tipo, che si definiscono come *determinanti di second'ordine* estratti dalla medesima *matrice;* tali funzioni guidano al concetto di *rango d'una matrice*, ed abilitano tanto a formulare in modo semplice e generale

Digitized by Google

la proposizione risolutrice del secondo degli enunciati problemi, quanto a trattare le analoghe questioni pei sistemi omogenei

$$ax + by + cz = o \qquad a'x + b'y + c'z = o.$$

III. Questi risultati sono suscettibili d'una importante interpretazione geometrica quando le x, y si considerano come coordinate cartesiane di un punto del piano; secondochè il rango della matrice $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ è 2 o 1, le rette rappresentate dalle equazioni $f = o$, $f' = o$ hanno una intersezione (che può cadere all'infinito) oppure coincidono. Trattando invece del caso di coordinate omogenee o considerando x, y, z come coordinate cartesiane di un punto nello spazio, le equazioni

$$ax + by + cz = o \quad , \quad a'x + b'y + c'z = o$$

rappresentano due piani distinti, due piani coincidenti o tutto lo spazio secondo il rango dell' anzidetta matrice vale 2,1 o 0. Tali applicazioni geometriche portano il nostro autore ad esprimere col mezzo di determinanti binari l'area di qualsiasi poligono piano. Ritornando poi alle considerazioni analitiche donde mosse, egli stabilisce in più modi le formole di moltiplicazione per determinanti (sottinteso *di 2.° ordine).*

IV. La regola di moltiplicazione dei determinanti insegna un procedimento per dedurre da due matrici quadrate una terza; tale procedimento si chiama *composizione* ed è la base di un calcolo simbolico suscettibile di importanti e vaste applicazioni. L' operazione di composizione conduce alle *potenze* (*s'intende positive*) delle matrici; essa gode della proprietà associativa, ma in generale non della commutativa. Fra le matrici quadrate è specialmente notevole la *matrice unità* $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la quale conduce al concetto di *matrice reciproca* di una data (sotto tale nome intendendosi la matrice che moltiplicata per questa dà l'unità) e quindi alla definizione di *potenza ad esponente intero negativo* di una matrice. Ad una matrice se ne può associare anche un' altra, quella del sistema *conjugato* o *trasposto* rispetto al primitivo. — L'analogia esistente fra la composizione delle matrici e l'ordinaria moltiplicazione dei numeri conduce naturalmente a proporsi un probloma analogo a quello che s' incontra nell' ordinaria aritmetica, cioè quello di *decomporre un sistema di quattro elementi in altri ulteriormente indecomponibili;* ed infatti il Kronecker prova essere possibile di considerare qualunque matrice quadrata come prodotto di fattori dei tre seguenti tipi

$$\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ 0 & , & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p & , & 0 \\ 0 & , & 1 \end{vmatrix};$$

Digitized by Google

e ne deduce tosto un' importante proprietà invariantiva caratteristica dei determinanti. Ritornando poi a considerazioni geometriche studia la corrispondenza univoca determinata delle equazioni

$$x = ax' + by' + c \quad , \quad y = a'x' + b'y' + c';$$

e, arrestandosi in particolare al caso in cui il determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ sia ortogonale, giunge alle note formole di trasformazione delle coordinate cartesiane ortogonali.

V. A queste applicazioni alla geometria fanno riscontro quelle all'aritmetica che i determinanti ricevettero, e di cui il nostro autore si occupa in seguito con la diffusione consigliata dalla importanza del tema. Egli considera perciò due equazioni *a coefficienti interi*

$$x = ax' + by' \quad , \quad y = a'x' + b'y'$$

e, prendendo a modello Gauss, considera il reticolato avente per nodi i punti (x, y) a coefficienti interi; esso si trasforma in un analogo sistema di punti (x', y'), anzi, se 1 è il valore assoluto del determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, *tutto* il primo reticolato trasformasi in *tutto* il secondo. In tal caso il sistema $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ può ottenersi moltiplicando un conveniente numero di fattori dei seguenti tipi $\begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. A questo punto Kronecker introduce la nozione di reticolati *equivalenti* (nozione ben nota a chi conosce la teoria delle funzioni biperiodiche, ove essa trova la sua più importante applicazione) e ne stabilisce il legame con la teoria delle forme bilineari.

VI. Sopra sviluppi e generalizzazioni collegati alla teoria algebrica dell' equivalenza, applicata alla teoria delle forme quadratiche, nonchè su un' introduzione spontanea dei quaterniari di Hamilton, aggirasi la lezione seguente. Prima di terminare la quale il Kronecker, si congeda dai determinanti di 2.° ordine, trattando la bella questione « quali sono le proprietà che possono ritenersi per caratteristiche di una siffatta funzione? ». La soluzione di essa chiude ben degnamente la trattazione elevata e originale della teoria dei determinanti di quattro elementi.

VII. Ma tale trattazione possiede ancora un altro altissimo pregio, quello, cioè, di essere estendibile ai determinanti di ordine superiore al 2.°. Per dimostrarlo intanto riguardo a quelli del 3.° il nostro autore considera le tre funzioni

$$f = ax + by + cz + d, \quad f' = a'x + b'y + c'z + d, \quad f'' = a''x + b''y + c''z + d'';$$

per risolvere il sistema $f = o$, $f' = o$, $f'' = o$ egli ricorda il procedimento elementare consistente nel ridurlo al sistema analogo con due

Digitized by Google

sole incognite e poi si domanda: « quale limitazione viene imposta alla variabilità delle x, y, z imponendo le condizioni $f = o$, $f' = o$, $f'' = o$? »; e procedendo in modo pienamente analogo a quello usato nella lez. II arriva alla funzione a cui si dà il nome di determinante dei sei elementi

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c''. \end{matrix}$$

Ne nota subito la propietà di non mutare se non di segno per lo scambio di due linee parallele e rileva anche che i numeratori ed il denominatore dei valori di x, y, z tratti delle equazioni $f = o$, $f' = o$, $f'' = o$ altro non sono che i determinanti ottenuti dalla matrice

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{matrix}$$

sopprimendone una verticale per volta, presi coi debiti segni.

VIII. Anche senza conoscere le espressioni effettive delle soluzioni delle equazioni $f = o$, $f' = o$, $f'' = o$ si possono stabilire le proprietà dei determinanti di 3.° ordine, purchè si ammetta che esistano tre funzioni razionali delle quantità qualunque $a, b, \ldots, d''$ soddisfacenti quelle tre equazioni. Il Kronecker infatti anzitutto dimostra che una tale soluzione è necessariamente unica ed ha la forma

$$x = \frac{\Phi_1}{\Theta_1}, \quad y = \frac{\Phi_2}{\Theta_2}, \quad z = \frac{\Phi_3}{\Theta_3},$$

ove le Φ, Θ sieno razionali intere dei 12 coefficienti $a, b, \ldots, d''$; egli prova $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta(a, b, c)$, funzione dei 9 coefficienti $a, b, \ldots, c''$. Si propone poi di indagare quale relazione interceda fra le funzioni $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Theta$ e trova essere

$$\Phi_1 = -\Theta(d, b, c), \quad \Phi_2 = -\Theta(a, d, c), \quad \Phi_3 = -\Theta(a, b, d).$$

Lo studio delle anzidette 6 frazioni è dunque ridotto a quello della sola frazione $\Theta(a, b, c)$. Ora il Kronecker dimostra che essa è una funzione lineare omogenea degli elementi di ciascuna linea e colonna del quadro

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'', \end{matrix}$$

cubica in tutti ed avente le proprietà di annullarsi identicamente se due colonne di quel quadro coincidono, di mutare segno per lo scambio di esse, e di restare inalterata per lo scambio delle linee con le colonne.

Finalmente la frazione Θ ammette un teorema di moltiplicazione

Digitized by Google

perfettamente analogo a quello dianzi stabilito pei determinanti di 2.° ordine e che il Kronecker dimostra al termine della sua VIII lez.

IX. Tale teorema rivela l'esistenza pei determinanti del 3.° ordine di un'operazione analoga alla composizione di due determinanti di 2.° ordine; essa si chiama pure *composizione* e (come nel caso dianzi studiato) gode della proprietà associativa, ma in generale non della commutativa. Introdotto il sistema *unità* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, di ogni determinante del 3.° ordine, si ottiene il *reciproco*, come quello che, moltiplicato pel primo, dà l'unità; il Kronecker lo scrive sotto varie forme e vi riattacca la nozione di suddeterminante. Generalizzando poi le considerazioni svolte pei determinanti di 2.° ordine, egli dimostra che ogni determinante del 3.° può decomporsi in un prodotto di fattori dei seguenti tipi

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

ed osserva inoltre che all'ultimo tipo di determinanti si può surrogare l'altro

$$\begin{vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Che tale decomposizione torni di utilità notevole risulta dalle importantissime applicazioni che il Kronecker ne fa alla dimostrazione di proprietà invariantive caratteristiche dei determinanti.

X. Volgendosi alle applicazioni aritmetiche della teoria precedente, il Kronecker suppone che i coefficienti di tutte le equazioni lineari considerate, o gli elementi dei determinanti, siano numeri interi e giunge così ad estendere alcune proposizioni dianzi stabilite pei determinanti del 2.° ordine. Passa poi allo studio dei sistemi omogenei

$$f \equiv a\,x + b\,y + c\,z + d\,u = o$$
$$f' \equiv a'x + b'y + c'z + d'u = o$$
$$f'' \equiv a''x + b''y + c''z + d''u = o\,;$$

e, col mezzo della nozione di *rango* della matrice dei coefficienti, compendia in modo perspicace e semplice i varî casi che quel sistema presenta; considerando x, y, z, u come coordinate omogenee di un

Digitized by Google

punto dello spazio, questi varii casi corrispondono a quelli che può presentare la mutua situazione dei tre piani $f=o$, $f'=o$, $f''=o$: il Kronecker non manca di rilevarlo.

XI. Questa lezione è dedicata alle applicazioni dei determinanti del 3.° ordine alla geometria analitica del piano. Anzitutto il Kronecker determina l'equazione della retta che unisce due punti di date coordinate cartesiane e nota che il determinante che ne forma il primo membro, se non è nullo, è una quantità proporzionale all'area del triangolo avente per vertici i punti di cui intervengono le coordinate. Questo significato geometrico del detto determinante lo conduce a stabilire la nozione di coordinate omogenee dei punti del piano; presi tre punti 1, 2, 3 e detto p un punto qualunque del loro piano, come tali il Kronecker assume i rapporti di aree

$$u=\frac{(p\,2\,3)}{(1\,2\,3)}\,,\quad v=\frac{(p\,3\,1)}{(1\,2\,3)}\,,\quad w=\frac{(p\,1\,2)}{(1\,2\,3)}\,,$$

i quali sono legati dalla relazione $u+v+w=1$. Ne deduce subito che, presi altri tre punti 4, 5, 6, si ha

$$\begin{vmatrix} u_4 & v_4 & w_4 \\ u_5 & v_5 & w_5 \\ u_6 & v_6 & w_6 \end{vmatrix} = \frac{(4\,5\,6)}{(1\,2\,3)}.$$

Come altra applicazione trova l'equazione della conica passante per 5 punti di date coordinate sotto una forma in cui non entrano che determinanti di 3.° ordine. In modo analogo a quello con cui vennero ottenute le coordinate omogenee dei punti, possono ottenersi quelle delle rette del piano; fra esse passa una relazione quadratica, che il Kronecker ottiene con procedimento elegante e sotto forma notevole, e ne mostra l'uso stabilendo l'equazione tangenziale del circolo inscritto nel triangolo fondamentale.

XII. Il procedimento adottato dal nostro autore per giungere alla nozione ed alle proprietà dei determinanti di 2.° e 3.° ordine è evidentemente applicabile a quelli di ordine più elevato ed egli lo prova applicandolo a quelli del 4°. Dei quali fa tosto applicazione alla ricerca di quell'elegante formola che esprime il prodotto dell'area di due triangoli in funzione delle mutue distanze fra i vertici e che, specializzata, riconduce alla nota formola di Erone relativa all'area di un triangolo in funzione de' suoi lati. Altre applicazioni concernono la corrispondenza per congruenza o per simmetria di due figure solide, donde si è naturalmente condotti alla considerazione dei determinanti ortogonali ed allo studio delle loro proprietà.

XIII. Ad applicazioni geometriche dei determinanti è totalmente consacrata la lezione successiva. Nella quale è anzitutto ottenuta

Digitized by Google

l'espressione del volume di un tetraedro in funzione delle coordinate de' suoi vertici; se ne trae l'equazione del piano sia sotto forma ordinaria, sia sotto la forma normale di Hesse, poi l'espressione del quadrato dell'area di un triangolo situato comunque nello spazio e quindi la nozione ed il valore del seno d'un triedro. Il Kronecker stabilisce poi la nota espressione del prodotto del volume di due tetraedri, per poi dedurne quella del volume del tetraedro in funzione de' suoi spigoli.

XIV. Proseguendo nel medesimo ordine di idee il nostro autore introduce le coordinate tetraedriche di un punto o di un piano qualunque dello spazio e stabilisce le principali relazioni che vi si connettono: fra queste rileveremo quella che lega le quattro coordinate omogenee di un piano nello spazio e l'espressione del volume del tetraedro in funzione delle coordinate de' suoi vertici o delle sue facce.

XV. Dal campo geometrico percorso nelle tre lezioni precedenti si passa bruscamente nella presente ad uno essenzialmente analitico; chè ivi il Kronecker, per porsi in grado di stabilire con generalità e rigore il concetto e le proprietà dei determinanti di ordine qualsivoglia, fa conoscere quei concetti aritmetici fondamentali, di cui egli fu il precipuo fattore, aventi per cardini le nozioni di *campo di razionalità* e *campo d'integrità;* introdotto il concetto di funzioni razionali intere in un dato campo, egli passa alla ricerca dei loro divisori, in particolare dei loro divisori primi, dimostrando che (analogamente a quanto succede nell'ordinaria aritmetica) ogni quantità intera in un dato campo può decomporsi in un solo modo in fattori primi. Chiudono la lezione alcune considerazioni sulle funzioni prime relative.

XVI. I risultati di questo intermezzo si mostrano utili nelle lezioni seguenti, ove il Kronecker considera un sistema di funzioni

$$f_h \equiv \sum_{k=0}^{k=n} u_{hk}\, x_k \quad (\text{ove } x_0 = 1 \text{ e } h = 1, \ldots, n)$$

e cerca se esistono delle funzioni dei coefficienti u_{hk} tali che rendano identicamente le $f_h = 0$. Sostituendo a quel sistema uno equivalente con sole $n - 1$ equazioni ed altrettante incognite e poi proseguendo si vede per induzione che tali funzioni effettivamente esistono. Ma il Kronecker preferisce invece ammettere come *postulato* l'esistenza di n funzioni razionali degli $n\ (n+1)$ coefficienti u_{hk} tali che sostituite alle x rendano identicamente $f_h = 0$; ne deduce che tali funzioni sono di necessità uniche. Posto in genere

$$x_t = \frac{X_t\,(u_{gh})}{\Theta_t\,(u_{gh})},$$

Digitized by Google

prova poi che tutti i denominatori sono fra loro eguali ($=\Theta(u_{gh})$) e che le n funzioni X_t sono prime con le Θ_t; inoltre che i valori delle x_t sono funzioni lineari dei termini noti $u_{1o}, u_{2o}, \ldots u_{no}$ e siccome, in valore assoluto, $X_t(u_{gh})$ nasce da $\Theta(u_{gh})$ sostituendovi $u_{1o}, \ldots, u_{no}$ risp. a $u_{1k}, \ldots, u_{nk}$, così lo studio delle $n+1$ funzioni X, Θ è ridotto a quello della sola Θ. Questa è una funzione lineare omogenea degli elementi di ogni singola colonna o linea del seguente quadro

$$\begin{vmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_{n1} \ldots u_{nn} \end{vmatrix},$$

la quale si annulla quando due qualunque sue linee parallele si identifichino, e cambia di segno, non di valore assoluto, permutandone fra loro due tali linee. Finalmente per le funzioni Θ dello stesso ordine n sussiste un teorema di moltiplicazione.

XVII. Una funzione Θ quale venne testè ottenuta gode delle seguenti tre proprietà:

a) È lineare omogenea negli elementi di ciascuna orizzontale del sistema u_{gh};

b) Muta segno per lo scambio di due sue orizzontali qualsivogliano;

c) È $\Theta=1$ supponendo $u_{gh}=1$ per $g=h$, e $=o$ per $g \gtrless h$.

Ora ciò permette, non solo di determinare la forma della funzione Θ, cioè lo sviluppo di essa (si ottiene così la nota espressione d'un determinante d'ordine qualsivoglia), ma anche di dedurne la dimostrazione del postulato ammesso nella lez. precedente e quindi di rendere esauriente l'esposto metodo di risoluzione dei sistemi determinanti di equazioni lineari.

XVIII. Gli sviluppi precedenti autorizzano ad affermare che una funzione godente delle proprietà *a*) e *b*) (v. più sopra) non differisce che per un fattore costante da un determinante e guidano a cercare se si possano costruire delle funzioni più generali che egualmente ne godano, ma dipendano dagli elementi di una matrice rettangolare.

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{m1} & u_{m2} & \ldots & u_{mn} \end{vmatrix}$$

Supposto $m<n$ e indicando per brevità con p il numero $\binom{n}{m}$ e con $D_1\ D_2 \ldots D_p$ i determinanti che nascono da quella matrice prendendone ad arbitrio m verticali, una funzione godente delle dette

Digitized by Google

proprietà è una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di quei determinanti. Se invece $m > n$ quella funzione è identicamente nulla, mentre nel caso intermedio $m = n$ essa, a meno di un fattore, riducesi ad un determinante. A questo punto viene stabilito il teorema di moltiplicazione di due matrici ed introdotta la considerazione dei determinanti formati dai suddeterminanti di un dato ordine di un dato determinante (*sistemi derivati*).

XIX. Per investigare le proprietà di tali sistemi si può applicare con vantaggio il noto teorema di Laplace, che nell'opera che stiamo analizzando si trova stabilito sotto varie forme e sviscerato nella sua essenza. Le conseguenze che ne sono ivi tratte porgono gli elementi per giudicare fino a quale punto sia limitata la variabilità delle indeterminate $x_1 \ldots x_n$ supponendo sia

$$f_h \equiv \sum_{k=1}^{k=n} a_{hk}\, x_k = 0 \qquad (h = 1, \ldots, m);$$

si è così condotti alla nozione ed alle proprietà di *rango* di un siffatto sistema o dell'analogo sistema non omogeneo.

XX. In questa lezione vengono stabilite per matrici qualsivogliono le regole, già esposte in casi particolari, pel calcolo con matrici ed introdotta la considerazione di certe matrici deducibili di una data col mezzo di determinati procedimenti. In vista di ricerche future è poi fatto cenno delle matrici i cui elementi sono funzioni di una variabile.

XXI. Lo stesso tema viene poi ulteriormente svolto nell'ultima lezione, coll'intento di giungere ai concetti di divisibilità ed equivalenza dei sistemi ed a quello di divisori elementari: di questi si apprende da ultimo la proprietà invariantiva.

Emerge da quanto precede come sia lecito asserire sin d'ora che l'intrapresa opera sui determinanti è destinata a divenire il trattato più completo e moderno sull'argomento e che essa è degna di attenzione e di studio da parte di tutti i matematici; tanto più che il valore della sostanza gareggia con la correttezza e l'eleganza della forma, frutto, questo, non solo di lunga elaborazione da parte del Kronecker, ma anche della collaborazione di alcuni suoi discepoli (primo l'Hensel) che hanno ormai un nome nella scienza. Ammirabile paese la Germania! ove un sapiente sistema didattico dà origine a corsi di lezioni così importanti; ove i più elevati corpi scientifici s'interessano a diffonderne la conoscenza per mezzo della stampa; ove un vasto pubblico di lettori incoraggia, con la prospettiva di onesti guadagni, gli editori intelligenti a colossali imprese librarie!

G. L.

Digitized by Google

R. MARCOLONGO. — *Teoria matematica dell' equilibrio dei corpi elastici.* — Milano, Manuali Hoepli, 1904. Pag. XIV+366. (Prezzo L. 3).

Questo volume, edito da Hoepli colla solita eleganza e nitidezza di caratteri, si apre con un capitolo ove sono esposte le proprietà principali delle *funzioni armoniche e poliarmoniche* e i teoremi di Green: premesse alcune generalità sopra tali funzioni, l'A. espone i teoremi relativi all' angolo visuale (da un polo) di una curva piana o di una superficie, poi due *lemmi di Gauss* sulla trasformazione di integrali di volume in integrali di superficie. Seguono i *due lemmi di Green*, il secondo dei quali viene generalizzato all'operazione Δ_{2n}, il *teorema di Green per l' operazione* Δ_2, e *l'analogo di Mathieu per l' operazione* Δ_4; mediante i predetti teoremi si dimostrano quelli relativi all' unicità di una funzione armonica o biarmonica per date condizioni al contorno. Vengono poi introdotte la *prima e la seconda funzione di Green* e assegnate le loro espressioni per un cerchio, per una sfera, un semipiano, o un semispazio, dopo di che si risolve effettivamente per questi stessi campi il *problema dei valori al contorno* (o problema di Dirichlet). Termina il capitolo un paragrafo nel quale è esposta la trasformazione (di Lamé) del Δ_2 in coordinate curvilinee ortogonali, la proprietà fondamentale della rappresentazione conforme e dell' inversione per raggi vettori reciproci, di fronte all' equazione $\Delta_2 = 0$, e i teoremi del Prof. Levi-Civita e del Prof. Volterra relativi all' inversione eseguita sulle funzioni biarmoniche e poliarmoniche.

Nel cap. II si studiano le proprietà principali delle funzioni potenziali newtoniane. Definita la *funzione potenziale di una massa distribuita in uno spazio a 3 dimensioni ed attraente secondo la legge di Newton*, si stabiliscono le proprietà principali inerenti ad essa (e alle sue derivate prime), e se ne assegna l'espressione nel caso di una sfera omogenea. L'A. passa quindi allo studio generale delle derivate seconde, per i punti della massa agente; dimostra dapprima le *formole del Prof. Morera*, e poi mediante queste, la celebre *formola di Poisson*. A questo punto noterò subito che è forse questa la prima opera didattica sulla Fisica-matematica in cui il teorema di Poisson è stabilito con condizioni relativamente poco restrittive (per riguardo alla densità) quali sono quelle richieste per la validità delle formole del Prof. Morera, dalle quali appunto segue senz' altro la formola di Poisson; poichè nelle altre opere congeneri, e anzi anche in qualche trattato di Analisi relativamente recente (quale, ad es., quello del Picard), si fa l' inutile ipotesi della derivabilità della densità.

Vengono poi dimostrate le *formole date da Weingarten* per la

Digitized by Google

discontinuità delle derivate seconde dalla funzione potenziale, attraverso la superficie che limita la massa agente, e costruita la funzione potenziale di un ellissoide omogeneo. L'A. espone quindi alcune proprietà della *funzione potenziale di strato semplice*, le formole di Weingarten riguardanti la discontinuità delle derivate prime attraverso la superficie sulla quale è disteso lo strato, e qualche proprietà della *funzione potenziale di doppio strato*. Per ultimo è dimostrato un'identità ed un teorema di reciprocità di Gauss sulle funzioni potenziali di due sistemi di masse, poi il *teorema della media* di Gauss ed alcune sue applicazioni, fatte da C. Neumann.

Questi due capitoli, di indole generale, possono considerarsi come una introduzione all'opera, ed è assai opportuno che l'A. li abbia inclusi nel suo Manuale, poichè i risultati ivi esposti, oltre ad essere applicati frequentemente nei capitoli successivi, sono pure utilissimi a chi voglia intraprendere lo studio di altre teorie di Fisica-matematica, come ad esempio quelle dell'Elettricità e Magnetismo, del Calore, ecc.

Col III cap. l'A. entra, dirò così, in argomento. Studia anzitutto la deformazione di una particella, introducendo le solite *componenti di spostamento*, *i coefficienti di dilatazione lineare*, *lo scorrimento mutuo di due direzioni* ecc., poi fa l'analisi della deformazione, dalla quale risulta che la deformazione infinitesima più generale di una particella consta di un moto di corpo rigido e di 3 estensioni semplici secondo tre rette ortogonali (*dilatazioni principali*). Nella ricerca delle dilatazioni principali si incontrano i cosidetti *invarianti fondamentali di deformazione*, dei quali quello lineare esprime il *coefficiente di dilatazione cubica*. Si introducono quindi le *componenti ortogonali di pressione* sopra un elemento piano, le *componenti speciali di pressione* e si dimostra il *teorema fondamentale di Cauchy* che stabilisce la dipendenza lineare delle componenti ortogonali della pressione sopra un elemento piano qualunque, dalle componenti speciali di pressione e dai coseni direttori della normale all'elemento. L'A. stabilisce poi le 3 equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo, alcune relazioni fra le componenti, secondo la normale ad un elemento, della pressione esercitata sull'elemento stesso, e le componenti ortogonali di pressione; e mostra poi ricorrendo all'*ellissoide di Lamé* e alle *quadriche di pressione*, come si possa interpretare e costruire geometricamente la pressione esercitata su un elemento piano, e come vi sia, in un corpo continuo, in generale una sola terna di elementi piani tra loro ortogonali e soggetti a sole pressioni normali, dette *pressioni principali*.

Nel IV cap. è enunciata la *legge sperimentale di Hooke*, che serve di base alla teoria matematica della elasticità, e sono introdotte le *costanti isotermiche* o *moduli di elasticità* dei corpi isotropi; l'A.

Digitized by Google

dimostra poi, per i corpi isotropi, le formole che esprimono le componenti speciali di pressione, come funzioni lineari ed omogenee delle componenti di deformazione, introduce quindi il *potenziale elastico* e il *potenziale specifico unitario relativo ad un dato punto*, ed espone alcune proprietà che legano quest'ultimo alle componenti di deformazione o di pressione; stabilisce infine le equazioni indefinite e ai limiti a cui devono soddisfare le componenti dello spostamento per i corpi isotropi, in equilibrio o in movimento.

Il V cap. è destinato alla ricerca delle equazioni dell'equilibrio elastico per i corpi *anisotropi* (cioè non isotropi); premessa l'antica teoria molecolare di Navier la quale fa dipendere le proprietà elastiche dei corpi isotropi da un solo coefficiente, e quelle dei corpi anisotropi da 21 coefficienti legati però da 6 relazioni dette di Cauchy-Poisson (che si sono trovate in completo disaccordo coll'esperienza), L'A. espone quella più recente detta delle *azioni immediate:* secondo questa teoria (in perfetto accordo coll'esperienza) le leggi della elasticità vengono dedotte dai fecondi principi della Termodinamica, analogamente a quanto si fa oggidì in altre questioni di Fisica-matematica, come p. es. in quelle relative all'equilibrio elettrico e all'induzione magnetica; si definiscono perciò le *modificazioni isotermiche invertibili* del corpo e si dimostra, applicando il 1.° principio di Carnot, che il lavoro compiuto in una qualunque serie di modificazioni isotermiche invertibili che conducono il corpo da uno stato qualunque ad un altro, non dipende che dai due stati iniziale e finale. Di qui si deduce l'esistenza del *potenziale isotermico unitario relativo ad un dato punto del corpo*, potenziale che gode di varie proprietà, fra le quali questa che le componenti di deformazione (o di pressione) sono le derivate negative del potenziale rispetto alle componenti di pressione (o di deformazione). Dopo ciò vengono introdotte le *costanti isotermiche e i moduli isotermici di elasticità* e date alcune loro proprietà. Segue un cenno sulla teoria molecolare del Prof. Voigt, il quale ha stabilito fra altro che l'ipotesi molecolare di Navier ha fallito unicamente a causa dell'ipotesi che le azioni molecolari (oltre che dipendere dalla distanza) siano anche centrali; vengono poscia dati, per alcuni cristalli i valori determinati dal Voigt, delle costanti di elasticità, e le conclusioni che egli ne dedusse. Per ultimo trovasi dimostrata l'univocità della soluzione delle equazioni dell'equilibrio elastico, per corpi qualunque, quando in superficie si conoscono le forze ovvero gli spostamenti, e indi il *teorema fondamentale di reciprocità del Betti.*

Il cap. VI tratta diffusamente delle proprietà generali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi isotropi: il problema fondamentale della teoria dell'Elasticità consiste nella *determinazione degli spostamenti dei punti di un corpo isotropo il quale è soggetto all'azione di date*

Digitized by Google

forze di massa ed è deformato da trazioni date, agenti sulla superficie del corpo; invece di dare queste trazioni si potrebbero dare *gli spostamenti superficiali*, ovvero *parte delle forze e degli spostamenti*, ecc. Di tale questione si è occupato il Betti, il quale diede al riguardo un metodo generale d'integrazione; l'A. espone appunto tale metodo sotto la forma ad esso data dal Prof. Cerruti: dimostra dapprima le formole che esprimono le componenti dello spostamento in funzione delle trazioni e spostamenti superficiali e della dilatazione cubica (1), e poi la formola del Betti che esprime la dilatazione cubica mediante le trazioni e gli spostamenti in superficie.

Seguono le *formole del Prof. Somigliana*, le quali fanno dipendere i valori degli spostamenti in un punto del corpo, soltanto dalle forze e dagli spostamenti al contorno, e quindi, per le equazioni dell'elasticità, fanno lo stesso ufficio che il teorema di Green per l'equazione di Laplace. Si può però operare una ulteriore riduzione: si possono cioè ottenere delle formole che esprimano gli spostamenti cercati, in funzione dei soli spostamenti in superficie; basta per ciò considerare un'opportuna deformazione ausiliaria (e tutta la difficoltà è ridotta a determinare questa), che permette di determinare la dilatazione cubica, dalla conoscenza della quale si hanno poi gli spostamenti mediante la risoluzione di problemi dei valori al contorno. Similmente, mediante una conveniente deformazione ausiliaria si possono determinare gli spostamenti date le trazioni superficiali, oppure dato parte degli spostamenti e delle trazioni superficiali. Si dimostra poi che per integrare le equazioni di equilibrio dei corpi isotropi, si possono sempre supporre nulle le forze di massa, e un *teorema del Prof. Cerruti*, che fa dipendere le componenti di spostamento da 3 sole funzioni armoniche; per ultimo sono enunciati i principali risultati di alcune recenti ricerche sulle equazioni dell'elasticità.

Applicando il metodo generale d'integrazione del Betti-Cerruti, ora accennato, si possono risolvere i tre problemi di Boussinesq e Cerruti, che consistono nel *determinare la deformazione di un solido, isotropo, indefinito, limitato da un piano indefinito, allorchè sul piano limite sono dati: 1.° gli spostamenti; 2.° le forze; 3.° gli spostamenti normali e le forze tangenziali, o reciprocamente.* Questo è l'oggetto del cap. VII nel quale sono dapprima dimostrate le formole

(1) Queste formole (12), attribuite al Betti, sono dovute al Prof. Somigliana, il quale le ha date la prima volta nella memoria: *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo* (Nuovo Cimento; a. 1885, pag. 145) e poi le ha ritrovate, con altro procedimento, nella memoria: *Sulle equazioni dell'elasticità* (Annali di Matematica; a. 1889, pag. 47). Il Prof. Marcolongo mi ha inoltre comunicato che tali formole le ha pure apprese in un corso dal Prof. Cerruti (a. 1885-86), il quale le ha date in lezione sin dal 1882-83, ma però non le ha mai pubblicate.

Digitized by Google

risolutive ottenute dal Prof. Cerruti, poi è esposto il procedimento più diretto e semplice del Prof. Almansi per risolvere i problemi dei primi due tipi, e quindi un metodo del Prof. Somigliana per risolvere i problemi del terzo tipo, metodo che è ancora applicabile al caso in cui il corpo essendo cristallino ammette il piano limite come piano di simmetria, e al caso di un diedro retto indefinito isotropo, oppure cristallino con 2 piani di simmetria elastica paralleli alle faccie del diedro; infine è esposta un'altra soluzione, del Prof. Tedone, relativamente al primo dei tre problemi considerati.

Il cap. VIII è destinato alla determinazione della *deformazione di una sfera isotropa:* premesse alcune notizie storiche sull'argomento, l'A. espone il semplice ed elegante procedimento del Prof. Almansi per determinare la deformazione della sfera isotropa, quando in superficie si conoscono gli spostamenti oppure le forze; questa soluzione è fondata sopra proprietà delle funzioni biarmoniche dovute all'Almansi stesso.

Nel cap. IX si tratta del *problema di Saint Venant relativo alla deformazione delle aste cilindriche,* e che più precisamente consiste nel determinare la deformazione di un cilindro retto isotropo non soggetto a forze di massa e nemmeno a trazioni sulla superficie laterale, per la quale risultino nulle in ogni punto del cilindro certe 3 componenti speciali di pressione (in modo che supponendo il cilindro costituito da tante fibre parallele all'asse, queste non risentano che pressioni tangenziali); si può supporre fra altro che il centro di gravità d'una base sia fisso; e che, preso intorno ad esso un elemento superficiale, questo si deformi restando nel piano della base, in modo che un suo elemento lineare non varì in direzione, e inoltre che l'altra base sia soggetta a forze, di cui si conoscono soltanto le 6 caratteristiche del sistema (di forze) da esse formato. Si possono allora determinare gli spostamenti, e mediante questi le 3 rimanenti componenti speciali di pressione che non sono nulle; analizzando la deformazione così ottenuta si riconosce che essa può ritenersi come la sovrapposizione di altre 6 più semplici, che sono una *estensione semplice,* due *flessioni uniformi,* due *flessioni non uniformi* ed una *torsione.*

Un altro problema che si può risolvere per i cilindri è il seguente: Si ha un cilindro sollecitato da forze distribuite soltanto sulla superficie laterale; sulle due basi risulteranno perciò nulle 3 delle componenti speciali di pressione; si tratta allora di determinare una deformazione del cilindro in modo che queste 3 componenti siano nulle non solo sulle basi, ma in tutto il cilindro (in modo che supponendo il cilindro costituito da tante sezioni parallele alle basi, esse sono soggette a sole pressioni tangenziali). Questo problema può riguardarsi in certo qual modo come *complementare di quello di Saint-Venant,*

Digitized by Google

ed è stato proposto e risoluto da Clebsch: la trattazione di esso forma l'oggetto del cap. X, nel quale sono date dapprima le espressioni degli spostamenti, dalle quali risulta che la deformazione in questione può riguardarsi come risultante dalla sovrapposizione di altre che sono una *flessione sferica*, una flessione *non uniforme*, ed una terza che ha il carattere di una *estensione*.

Nell'ultimo capitolo sono esposti i problemi risoluti dal Voigt, che costituiscono una generalizzazione del problema di Saint-Venant e permettono di assegnare metodi generali per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli. In questi problemi *si considera un cilindro cristallino soggetto a forze distribuite in modo opportuno soltanto sulle due basi, e si cerca se sono possibili delle deformazioni per le quali le componenti speciali di pressione* (e quindi anche le componenti di deformazione) *risultino costanti lungo tutto l'asse del cilindro*. Si dimostra che tali deformazioni sono effettivamente possibili, anzi le formole generali che esprimono le componenti di spostamento contengono 3 funzioni arbitrarie che si possono determinare specializzando ulteriormente le condizioni del problema; il che può farsi in due modi diversi: o imponendo la condizione suppletiva che le forze interne siano parallele all'asse del cilindro (cioè che siano nulle le prime 5 componenti speciali di pressione), oppure esprimendo che siano nulle certe 4 delle componenti speciali di pressione. Da ultimo è mostrato in qual modo le formole che così si ottengono per gli spostamenti, e quindi per le forze, possano servire per la determinazione delle costanti elastiche dei cristalli.

* * *

Tale è il contenuto dell'opera del Prof. Marcolongo, la quale risponde ad un piano organico ben determinato: quello cioè di esporre dapprima la teoria generale e le principali proprietà delle equazioni di equilibrio dei corpi elastici isotropi a 3 dimensioni, poi di trattare alcuni casi semplici e notevoli come quello di un suolo isotropo, di una sfera isotropa, e i problemi di Saint-Venant, Clebsch e Voigt sui cilindri.

Il libro, per essere inteso, richiede poche cognizioni di Analisi; esso è corredato di copiose indicazioni bibliografiche, le quali, additando al lettore le fonti originali, gli forniscono il mezzo di approfondire lo studio di quelle questioni che in particolar modo più l'interessano; la redazione poi è assai chiara e precisa. Inoltre l'A. ha tenuto conto e messo in bella luce le notevoli ricerche eseguite negli ultimi lustri dai geometri, specialmente italiani; in guisa che il libro ha uno spiccato sapore di freschezza e di modernità che lo distingue dai conge-

Digitized by Google

neri, e lascia nel lettore il desiderio che l'A. dia alle stampe anche la parte destinata all'equilibrio e al movimento dei corpi elastici in cui alcune delle dimensioni sono infinitamente piccole rispetto alle altre (e che già vide la luce, in veste litografica, l'anno scorso). Notando poi che l'A. non si propose di esporre dottrine sue originali, ma bensì, come dichiara nella prefazione, « di facilitare la via a studi più completi, mostrando in una breve e rapida esposizione ciò che di più importante è stato prodotto in questa tra le più notevoli teorie di Fisica-matematica », si può bene concludere che egli ha pienamente raggiunto il suo intento; onde questo manuale, del chiaro quanto modesto professore di Messina, è vivamente da raccomandare ai giovani cultori di Fisica-matematica, e troverà certo presso gli studiosi quell'accoglienza che gli danno diritto i suoi pregi intrinseci, e che costituirà per l'Autore l'unico compenso delle sue fatiche.

T. Boggio.

H. G. Zeuthen. — *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII. Jahrhundert.* Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. Meyer, Mit 132 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1903, 8.° p. VIII + 431 (Prezzo del volume legato Mk. 16).

Sono generalmente noti i concetti dirigenti l'opera dello Zeuthen come storico ed i mezzi che egli adopera per attuarli. Per lui compito dello storico della scienza è notare il sorgere e seguire gli sviluppi e le applicazioni delle idee direttrici nelle singole epoche, attingendo per ciò gli elementi nello studio approfondito dalle fonti; i particolari storici ed i dati biografici hanno per lui importanza secondaria, tanto che egli reputa opportuno farne cenno prima di esporre le teorie e si contenta di desumerli da altre storie anteriori (specialmente da quelle del Cantor). Il nuovo volume che ora abbiamo il piacere di annunziare, pur essendo un'effettiva continuazione di altro, di cui non a guari parlammo (*v. Bollettino*, T. V, 1902. p. 112), ne è indipendente. Esso concerne un periodo di storia delle matematiche per importanza a nessuno secondo, cioè il periodo in cui, con la invenzione della geometria analitica e del calcolo infinitesimale, vennero gettate le basi della matematica moderna; chi ricorda i bellissimi saggi dello Zeuthen concernenti il periodo di praparazione dell'analisi infinitesimale, non tarderà a convenire che egli era mirabilmente preparato per adempiere il compito assunto.

Un'analisi minuta dell'opera dello Zeuthen essendoci vietata, daremo soltanto l'elenco dei capitoli che la formano.

I. *Sguardo storico e biografico.*

II. *Analisi finita.*

Digitized by Google

1. Risoluzione algebrica delle equazioni cubiche e biquadratiche. 2. Il linguaggio algebrico. 3. Teoria generale delle equazioni algebriche. 4. Trigonometria; suo legame coll'algebra. 5. Calcoli numerici anteriori all'invenzione dei logoritmi. 6. Scoperta dei logoritmi; calcoli con essi. 7. Teoria dei numeri, equazioni indeterminate e funzioni continue prima di Fermat. 8. Teoremi aritmetici di Fermat. 9. Analisi combinatoria e calcolo delle probabilità. 10. Geometria; applicazione della projezione centrale. 11. Lavori di Fermat concernenti l'algebra e la geometria analitica. 12. Le *Géomètrie* di Cartesio. 13. L'analisi finita dopo Descartes.

III. *Nascita e primo stadio di sviluppo del calcolo infinitesimale.* 1. La meccanica all'alba dell'epoca moderna. 2. Integrazioni anteriori al calcolo integrale. *a*) Keplero. *b*) Cavalieri, Torricelli e Gregorio di S. Vincenzo. *c*) Fermat, Pascal, ecc. *d*) Wallis. *e*) Applicazioni dell'integrazione; rettificazione; ecc. 3. Metodi di approssimazione indefinita; serie. 4. Metodi di risoluzione dei problemi che si sciolgono oggi mediante differenziazione. *a*) Metodo delle tangenti di Torricelli. e Roberval; speciali determinazioni di tangenti fatte da Descartes. *b*) Metodi di Descartes e Hudde. *c*) Metodo di Fermat; regole di Huygens e Sluse. 5. La cicloide, sue applicazioni meccaniche; le evolute. 6. Il problema inverso delle tangenti; teorema d'inversione di Barrow. 7. Relazioni fra Newton e Barrow; applicazioni del teorema d'inversione. 8. Sviluppi in serie dovuti a Newton; estensione del metodo dei coefficienti indeterminati. 9. Risultati degli sviluppi in serie e delle integrazioni di Newton. 10. Il metodo delle flussioni di Newton. 11. I *Principia* di Newton. 12. Leibniz sino all'invenzione del calcolo differenziale. 13. Principio di una nuova èra nella storia della matematica (1).

Aggiungeremo un'osservazione sulla forma della esposizione. Lo Zeuthen fa conoscere sulla storia di ciascuna teoria ciò che egli giudica conforme alla verità, senza arrestarsi a giustificare le sue asserzioni o a combattere gli eventuali oppositori; è un sistema, avente il Mommsen quale suo più noto rappresentante, e raccomandantesi per la grandiosità e l'imponenza delle costruzioni risultanti; è un sistema che verrà altamente apprezzato e lodato da quei matematici ai quali basta formarsi un concetto adeguato dei vari stadi per cui passò la loro scienza. Ma coloro ai quali sta a cuore che la storia delle matematiche venga resa più perfetta, che nuove ricerche ven-

(1) Ci siano leciti due microscopici appunti.

P. 7. Guido e Ubaldo sono i nomi del marchese *Del Monte*.

P. 233-4. Il *Racconto d'alcune proposizioni proposte e passate* fra Torricelli ed alcuni matematici francesi contemporanei, non è inedito, essendo stato pubblicato prima da C. Dati e poi dal Fabbroni.

Digitized by Google

gano all' uopo istituite, che giovani forze vengano a ciò dedicate, accordano invece la preferenza al sistema opposto, dal quale E. Zeller nella sua *Storia della filosofia greca* ha offerto un' applicazione, il cui splendore verrà difficilmente superato; è quel sistema secondo cui della soluzione di ciascuna questione sono indicati i pregi ed i difetti, secondo cui vengono chiaramente distinte quelle in cui il desiderio ragionevolmente s' aqueta da quelle di cui essenziali perfezionamenti si manifestano necessari.

Tale osservazione vien fatta qui non con intenzione di critica, ma soltanto per dare un' idea dell' indole dell' opera zeutheniana. L' illustre autore ha voluto fare un libro a servigio dei matematici, non ad incremento della storia della matematica, e vi è pienamente riuscito; qual elogio migliore potrebbesi concedergli?

G. L.

MINEO CHINI. — *Corso speciale di Matematiche con numerose applicazioni ad uso principalmente dei Chimici e dei Naturalisti*, 8.°, p. IX + 259 — Livorno, Giusti, 1901. (Prezzo L. 3.80).

La istituzione di un Corso di Matematica per gli studenti di Chimica pura — ritenuto, da tempo, indispensabile da tutti i competenti — ha sollevata anche presso di noi la questione di preparare un programma di studio, che riunisca nella forma più semplice possibile gli elementi di algebra, di geometria analitica e di calcolo infinitesimale che sono necessari a poter comprendere le principali applicazioni della analisi matematica alla Chimica.

Il libro del Prof. Chini risponde a tale quistione, e noi crediamo di affermare cosa conforme al vero dicendo che fra i diversi altri che, collo stesso intento — all' estero ed in Italia — lo hanno preceduto, tiene un posto onorevole e segna anzi, sotto certi aspetti, un notevole progresso. Certamente l' autore ha avuto un' intuizione esatta dello scopo da raggiungere, cioè conciliare il massimo rigore colle più grandi semplificazioni possibili, lasciando da parte tutto ciò che non può servire direttamente alle applicazioni.

Secondo questo concetto crediamo sia da approvare il modo con cui l' autore presenta la teoria dei determinanti partendo dai casi più semplici ed evitando la definizione algebrica generale. Così, per citare un altro esempio, è da ritenersi opportuna la introduzione del concetto d' integrale definito con sole divisioni dell' intervallo in parti uguali e, in generale, ottimo il criterio di presentare le teorie distaccandole il meno possibile dai problemi alle cui soluzioni sono destinate.

Troviamo pure assai utili e ben fatti i due capitoli sull' interpolazione e sulla teoria degli errori che generalmente non trovano posto

Digitized by Google

nei nostri corsi di calcolo, sebbene tanta importanza abbiano nelle applicazioni alle scienze fisiche.

Certamente non è ora agevole il decidere se sia possibile in un solo anno addestrare le menti dei giovani al maneggio del calcolo, sia pure limitato alle questioni più elementari. L'esperienza in questo campo è appena incominciata presso di noi e, pur troppo, già interrotta col ritorno agli antichi regolamenti universitarii. Ma se tale esperienza, come è sperabile, dovrà ripetersi, riteniamo che quest'operetta potrà essere di grande utilità.

Appropriata è in generale la scelta delle numerose applicazioni a questioni di meccanica, di chimica e di fisica, di cui a giusto titolo il Chini ha arrichito il suo libro. Però la forma dogmatica, per così dire, colla quale sono richiamate le proprietà ed i concetti di fisica e chimica, su cui sono fondate le applicazioni (sebbene inappuntabile dal punto di vista logico) lascierà probabilmente delle lacune nella mente dei giovani lettori. Non era difficile in molti casi riattaccarsi a cognizioni note o giustificare con qualche dilucidazione i concetti introdotti, od almeno, con opportune citazioni, rimandare il lettore a qualche trattato dei più conosciuti.

Del resto questo appunto, che facciamo al lavoro del Prof. Chini, crediamo non ne menomi che in piccolissima parte i pregi indiscutibili.

C. SOMIGLIANA.

H. WEBER u. J. WELLSTEIN. — *Encyklopädie der Elementar-Mathematik.* Ein Handbuch für Lehrer und Studirende. Erster Band; *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis* bearbeitet von H. WEBER. Leipzig, B. G. Teubner, 1902, Gr. 8; p. XVI+446 (Prezzo del vol. legato Mk. 8).

L'opera completa consterà di tre volumi, dei quali per ora è apparso in luce soltanto il primo, comprendente la *Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis* è dovuto ad H. WEBER. Degli altri due volumi sappiamo soltanto che il secondo sarà dedicato alla Geometria, e il terzo conterrà le applicazioni della Matematica elementare alla Geometria Descrittiva, alla Meccanica, alla Fisica e al Calcolo delle probabilità. Non è quindi per ora possibile avere una idea precisa dei limiti e dei caratteri dell'opera intera: ma, poichè la bella e suggestiva prefazione del WEBER (1) accenna già agli scopi

(1) Questa prefazione è riprodotta con poche aggiunte e lievi modificazioni nell'articolo del WEBER: *Ueber die Stellung der Elementarmathematik in den mathematischen Wissenschaften:* Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12 Bd , 8-9 Heft. 1903, come pure Zeitschrift für math u. naturw. Unterricht, 34 Jhg. 6 Heft.

Digitized by Google

di questa Enciclopedia e, nelle loro linee generali, ai criterii, in base ai quali ne fu ideato il disegno, non sarà inutile intanto il render conto del contenuto di questo primo volume, che, già considerato in sè stesso, costituisce un'opera ben degna di nota.

Non si tratta di un libro scolastico in senso stretto. Agli studenti è destinato solo in quanto essi, alla soglia degli studi matematici superiori, vogliano rimettersi in contatto cogli elementi, e « rinfrescare e completare cognizioni già prima acquisite ». Ma il pubblico, cui, secondo le intenzioni dell'A., il libro più precisamente si rivolge, è dato dagli insegnanti di Matematica delle Scuole medie.

Il compito a questi affidato è estremamente complesso e difficile, poichè essi debbono per una parte fornire agli scolari un certo sistema di nozioni concrete, che costituiscano il primo stadio di coltura nella serie dei loro studî professionali; ma d'altra parte si richiede ancora da essi che esercitino sugli alunni un'azione educativa, destando e svolgendo in loro lo spirito di osservazione, avvezzandone la mente al senso dell'esattezza e dell'equilibrio, disciplinandone le facoltà logiche ed inventive. Certo, a seconda della natura e dell'ordinamento delle diverse scuole, varia il rapporto di importanza che intercede fra codesti due scopi; ma non vi è dubbio del pari che in nessuna scuola l'uno di essi può soppiantare radicalmente l'altro, senza che ne derivi un danno effettivo e gravissimo; mentre poi d'altro canto le necessità della pratica fanno insorgere spesso fra quei due ordini di esigenze un certo dissidio e quasi quasi un vero antagonismo. Appunto in ragione delle serie difficoltà, che in causa di codesta « disarmonia di scopi » l'insegnante incontra ad ogni passo sul suo cammino, si richiedono in lui una coltura matematica opportunamente eclettica, una specifica ed equilibrata preparazione intellettuale, un gusto fine, elevato, sicuro di ciò che la Matematica, anche nel campo elementare, ha di suggestivo e quasi direi di estetico. È in queste esigenze che il libro del WEBER trova la sua origine e i suoi scopi. In esso l'A., prendendo le mosse dai primi principî dell'Aritmetica, e volgendosi lungo il cammino a considerare da punti di vista man mano più elevati tutte le applicazioni anche più elementari e consuete, giunge per una via luminosa e, per quanto è possibile, diretta a quei risultati salienti e generali, dai quali è possibile dominare in una sintesi limpida e completa l'intero sviluppo e le reciproche relazioni delle teorie, che via via si riattaccano agli elementi dell'Algebra e dell'Analisi.

Ai « Fondamenti dell'Aritmetica » è dedicato il primo libro del volume (pagg. 1-182), nel quale la genesi del concetto di numero e la teoria degli irrazionali sono svolte sostanzialmente secondo le idee del DEDEKIND. Fra gli argomenti particolari, cui è qui dato un giusto

Digitized by Google

rilievo, noterò il calcolo con frazioni decimali, con frazioni decimali accorciate, con irrazionali; e già in questa parte, come nel rimanente del libro, sono apposte qua e là brevi note storiche e bibliografiche, che danno al lettore modo ed impulso a cercare altrove notizie più dettagliate. Dopo un capitolo destinato a porre in luce l'applicabilità del concetto di numero alla rappresentazione delle grandezze concrete (misurabilità, rapporti, misure fisiche e loro unità, grandezze incommensurabili), l'A. tratta delle potenze e dei logaritmi, soffermandosi particolarmente sulla costruzione delle tavole (di NEPER e di BRIGG). La teoria delle equazioni lineari è svolta solo per il caso di tre incognite ed è illustrata con alcune semplici applicazioni (analisi chimica indiretta, distribuzione di una corrente lungo i fili di una rete, ponte di *Wheatstone*), dopo di che, trova posto, occasionata dalla risoluzione delle equazioni di secondo grado, la teoria dei numeri complessi e la loro rappresentazione geometrica. L'ultima parte del libro è dedicata ai concetti fondamentali di calcolo combinatorio (fra i quali è messo particolarmente in luce quello di gruppo di sostituzioni) e si chiude con una serie di applicazioni diverse (potenza del binomio, progressioni aritmetiche generali, progressioni geometriche, calcolo di interessi e di rendite).

Mentre sin dapprincipio ogni capitolo, considerato in sè, ha pregi singolari di limpidezza, di concisione e di eleganza, il piano generale di questo primo libro del volume del Weber non mi sembra del tutto privo di difetti. Le equazioni di 1.° grado rinviate dopo le teorie degli irrazionali e quella dei logaritmi, che pure è svolta sulla base della considerazione della equazione esponenziale, mi sembrano spostate dal loro luogo naturale; nè mi so ben rendere ragione perchè l'A., che pure nel bellissimo suo primo capitolo si indugia con una esposizione tanto felice sui concetti di aggregato, di numerosità, di numerabilità, ecc., abbia poi relegato alla fine del libro quelle teorie combinatorie che si riattaccano direttamente a quei primissimi concetti e, quel che più importa, sono la base di una concezione dei fondamenti dell'Aritmetica, che, sia dal punto di vista critico, come anche da quello didattico, oramai si impone (1).

Ma passiamo a quella parte dell'opera, che è degna senz'altro del consenso più incondizionato.

Nel secondo libro, dedicato all'« Algebra » (pagg. 183-330), dopo le generalità relative alle equazioni algebriche e il teorema fondamentale, stabilito in base alla seconda dimostrazione di Gauss, si hanno due capitoli sulle equazioni indeterminate di 1.° e 2.° grado: nel primo,

(1) Basterà ricordare le *Istituzioni di Analisi algebrica* di A. CAPELLI (Napoli, 9102).

Digitized by Google

come applicazione dei residui di potenze, è svolta la teoria di Gauss dalle frazioni decimali periodiche, nel secondo trovano luogo, col teorema di Wilson i principî della teoria dei residui quadratici, la determinazione dei triangoli pitagorici, la dimostrazione del grande teorema di Fermat per il 4.° grado, la decomposizione di un numero nella somma di due quadrati e il conseguente criterio per riconoscere i grandi numeri primi; ed è da ultimo dato un cenno dei numeri perfetti. A codesti due capitoli di teoria dei numeri l'A. ne aggiunge un terzo, sullo sviluppo in frazione continua periodica degli irrazionali quadratici e sulla risoluzione dell'equazione di PELL, e passa quindi a studiare con una certa ampiezza la risoluzione algebrica delle equazioni di di 3.° e 4.° grado, dando un largo sviluppo alla discussione delle formole di risoluzione e ponendo da ultimo in luce la relazione tra le proprietà del gruppo quaternario totale e la possibilità di costruire per la equazione biquadratica una risolvente cubica (risolventi di *Ferrari* e di *Lagrange*). Segue un capitolo sul calcolo approssimato delle radici delle equazioni numeriche, e si ha infine uno studio sommario della divisione del cerchio, con un cenno dei periodi di Gauss e la costruzione algebrica dell'ettadecagono.

Questa rapida rassegna del contenuto di codesti capitoli dell' « Algebra » mostra già l'elevatezza dei concetti e la copia dei risultati, che vi vengono raccolti; ma ancor più mirabile è il modo in cui l'A. ha saputo lumeggiare, in misura proporzionata alla loro importanza rispettiva le relazioni essenziali fra concetto e concetto, e far risaltare, traverso una esposizione inevitabilmente complessa, il graduale sviluppo storico delle singole teorie. E qui, in fine al libro, in un bel capitolo sulle « Dimostrazioni di impossibilità » egli può, oramai senza sforzo, stabilire quei risultati generali di indole critica, che sono quasi direi lo scopo di tutti i capitoli precedenti e ne costituiscono la sintesi. In codesto capitolo egli caratterizza algebricamente la costruibilità mediante la riga ed il compasso, dimostra la irresolubilità mediante radicali quadratici dell'equazione cubica generale, tratta le questioni di riducibilità relative alle equazioni binomie (di grado primo) e il *casus irréducibilis;* e infine, in base al teorema del Kronecker sulle equazioni metacicliche, irreducibili, a coefficienti reali, di grado primo dispari (qui dimostrato direttamente pel caso del quinto grado) stabilisce la irresolubilità algebrica della equazione di 5.° grado generale.

All' « Analisi » è destinato il terzo e ultimo libro del volume (pagg. 331-441). Qui la materia è per natura sua assai meno complessa e intricata, onde l'esposizione corre, per vie relativamente consuete, dalle generalità sulle serie, con una breve trattazione delle serie di potenze e delle proprietà del cerchio di convergenza, allo studio par-

Digitized by Google

ticolareggiato e sistematico delle serie della funzione esponenziale e delle funzioni trigonometriche, della serie binomiale, della serie logaritmica e delle serie trigonometriche, con un cenno della conseguente rappresentazione analitica di funzioni discontinue. Segue un breve studio sui prodotti infiniti, e da ultimo, in un capitolo che ha qui ufficio in qualche modo analogo all' ultimo del secondo libro, è data la dimostrazione della trascendenza di e e π.

Quel consenso degli esperti della scuola, da cui gli A. di questa Enciclopedia si ripromettono il più gradito compenso alla loro impresa, non mancherà certo intanto a questo primo volume, che dall' elevatezza dei criteri generali e dalla cura sapiente dei particolari è reso singolarmente atto a raggiungere quegli scopi, per cui è stato concepito; e benchè esso sia più particolarmente indirizzato agli insegnanti delle Scuole medie tedesche, non credo fuor di luogo, l'augurarne la diffusione anche presso di noi. Il WEBER, nella prefazione, rammenta ancora con gratitudine, dopo quasi cinquant' anni, l' impulso e l' impronta ricevuti dall' insegnamento del suo professore del Liceo di Heidelberg, A. Arneth, dotto storiografo delle Matematiche e buon cultore della Fisica; eppure allora, come egli afferma, la Matematica, nelle Scuole classiche della Germania meridionale, occupava nel piano degli studi un posto del tutto subordinato, e fra la maggioranza degli scolari e gli stessi insegnanti delle altre materie godeva una assai scarsa considerazione. « Ora » aggiunge il Weber « un grande progresso si è fatto e non accade quasi più che uno scolaro, il quale sia passato traverso tutte le ore di Matematica senza nulla affatto comprendere, alla fine del corso sia tuttavia riconosciuto maturo e perciò licenziato. » — Tanto, forse, presso di noi non si è ancora ottenuto; ad ogni modo io credo che a migliorare ulteriormente le condizioni dell' insegnamento della Matematica nelle nostre Scuole medie debba contribuire sopratutto la coltura seria ed elevata degli insegnanti. La Matematica elementare non è un ramo di studio ormai tronco e inaridito, ma vive tuttora in un ricambio lento ma perenne coll' intero organismo della nostra scienza, della quale si può ben dire che quasi nessuna scoperta essenziale, quasi nessuna nuova conquista di più larghe vedute sia passata finora senza provocare un' eco corrispondente e necessaria nel campo degli elementi. Da un insegnante, il quale, prescindendo da codesti rapporti di mutua dipendenza che il suo programma di insegnamento ha coi campi più elevati, restringa la propria attività intellettuale alla Matematica elementare, considerata come chiusa in sè, potremo aspettarci nella scuola le pedanterie e le grettezze tormentose del rigore, le pompose quanto inconsulte e inutili escursioni fuori del campo strettamente elementare, l' educazione degli scolari a quel tecnicismo uniforme e quasi automatico, che

Digitized by Google

isterilisce ogni gusto di ricerca e soffoca ogni originalità di avvedimenti; ma non otterremo mai quell'equilibrio di vedute sintetiche e di tendenze critiche, quella elevatezza di criteri didattici e quella consapevolezza dei limiti e degli uffici del proprio insegnamento, senza di che la Matematica nelle Scuole medie non può recar buoni frutti nè come mezzo educativo, nè come preparazione professionale.

UGO AMALDI.

H. LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, professées au Collège de France. Paris, Gauthier-Villars, 1904. VIII-138 p. 8.°.

Questo volume fa parte della interessante *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* diretta da E. Borel. In esso trovasi esposto in forma parte storica e parte sistematica, con molta chiarezza e in generale anche con rigore, quanto concerne i principi del Calcolo integrale.

L'Autore incomincia coll'illustrare il concetto di funzione e di integrale prima di Riemann, accennando anche all'estensione, dovuta a Cauchy, della definizione d'integrale alle funzioni discontinue. Di qui viene alle condizioni di integrabilità date da Riemann e da Du Bois-Reymond, e mostra poi come i concetti di estensione di un aggregato e di aggregati misurabili permettano di dare, anche per funzioni molto generali, una definizione geometrica d'integrale.

Una classe importante di funzioni integrabili è quella delle funzioni *a variazione limitata;* il loro studio si connette con quello della rettificazione delle curve, giacchè — come è noto — una linea:

$$a = a(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

è rettificabile sempre e soltanto se le funzioni $a(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono a variazione limitata.

Dall'integrale definito si passa nel modo ben conosciuto all'integrale indefinito È importante notare che non sempre un integrale indefinito ammette la derivata in tutti i punti, e che non sempre una funzione integrabile è la derivata d'un'altra funzione. Ciò conduce a parlare dei *numeri derivati* o *estremi oscillatori* e cercare sino a qual punto la conoscenza di essi determini la funzione. Tornando alle funzioni derivate, può osservarsi che esse hanno proprietà analoghe a quelle delle funzioni continue; p. es. una funzione derivata non può passare da un valore ad un altro senza prendere tutti i valori intermedi.

Dopo aver ricordato la definizione di integrale come inversa della

Digitized by Google

derivata, adottata da Duhamel e da Serret, e aver osservato che essa non è equivalente a quella di Riemann, l'Autore propone una nuova definizione d'integrale, e chiama *sommabili* le funzioni che secondo questa definizione sono integrabili.

Una breve appendice è dedicata all'esposizione di alcune tra le più importanti proprietà degli aggregati.

Abbiamo detto che *in generale* il rigore non manca. Vogliamo ora rilevare qualche punto in cui ci pare esso faccia difetto.

L'asserzione a p. 22, l. 4 e segg. non è esatta; ed è facile accorgersi che il ragionamento su cui essa si fonda non è affatto stringente.

A p. 28 si legge che un insieme di misura nulla può esser denso dappertutto; ma ciò è impossibile, perchè un insieme denso in tutto un segmento ha per misura la lunghezza del segmento stesso.

L'osservazione sopra una dimostrazione di Scheeffer, contenuta nella nota a p. 77, non è giustificata. Infatti, una volta dimostrato che, se $f_1(x) - f_2(x)$ non è costante, vi è un insieme di punti avente la potenza del continuo in cui il numero derivato superiore a destra è diverso per le due funzioni, resta stabilito anche il teorema.

Malgrado queste piccole imperfezioni, noi dobbiamo esser lieti della pubblicazione di quest'opuscolo, il quale senza dubbio concorrerà alla diffusione di una teoria che è tanto interessante quanto poco conosciuta.

G. VIVANTI.

D. SELIWANOFF. *Lehrbuch der Differenzenrechnung* (V. XIII della *B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der math. Wissenschaften*). Leipzig, Teubner, 1904. 8.° p. VI-92

Questo libro è, come dice l'autore stesso, lo sviluppo dell'articolo *Differenzenrechnung* della *Encykl. d. math. Wiss.*, nel quale naturalmente si trovano i soli enunciati dei teoremi. Esso è scritto in forma facile e chiara, anzi forse in qualche punto troppo prolissa; e può utilmente servire di preparazione alla lettura di trattati più estesi sullo stesso argomento.

G. VIVANTI.

CARL FRIDERICH GAUSS. — *Werke. Neunter Band. Herausgegeben von der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingem.* In Commission bei B. G. Teubner, 4° p. 528 (Prezzo Mk. 26).

Questa nuova pietra del grande monumento che la Germania sta elevando al più grande dei suoi matematici del secolo scorso (cfr. *Bollettino* III, 1900, p. 118) deve specialmente interessare geodeti ed

Digitized by Google

astronomi. Infatti il vol. che annunciamo funge da continuazione e complemento al IV, contenendo gli scritti geodetici altrove pubblicati e che in questo non presero posto, altri inediti e le lettere che a quelli e questi si riferiscono. Alla compilazione di esso presiedette M. Brendel, cui ne fu precipuo autore L. Krüger, assistito da A. Börsch. Tutto il contenuto si ripartisce nelle sezioni seguenti: Determinazione delle differenze di latitudine fra Altona e Gottinga. Ellissoide terrestre e linee geodetiche. Rappresentazione dello sferoide su di una sfera, su di un cono o sul piano. Determinazione trigonometrica. Misura di altezze. Eliotropio. Errori nelle misure. Riduzione di angoli all' orizzonte.

G. L.

A. H. Bucherer. — *Elemente der Vektor-Analysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik.* — Leipzig, Teubner 1903, 8.° pag. VI+91 (Prezzo del vol. legato Mk. 2.40).

Introduzione.

§ 1. Addizione e sottrazione. — § 2. Decomposizione di vettori. — § 3. Rotazioni. — § 4. Prodotti di due fattori. — § 5. Prodotti di tre fattori — §§ 6-8. Differenziazione; applicazioni e problemi di meccanica — § 8*a*. Trasformazioni vettoriali. — § 9. Il potenziale. — § 10. Decomposizione di un vettore. — § 11. Trasformazione delle derivate rispetto al tempo in derivate rispetto allo spazio. — § 12. Teorema di Green. — § 13. Teoremi di Beltrami e di Poincarè-Lorentz. — § 14. Il principio di Huygens. — § 16. Sull' idrodinamica dei fluidi ideali.

Riassunto delle formole e delle definizioni più importanti.

I. Alexandroff. — *Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Uebungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von* M. Schuster. — Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1903. 8° p. VI + 123 (Prezzo del vol. leg. Mk. 3).

L' ottimo successo che ebbe la traduzione francese di questa operetta (cfr. *Bollettino* T. IV, 1809, p. 129) consigliò la Casa Teubner a provocare quella tedesca che annunziamo; nuovo argomento questo per raccomandare ai professori delle nostre Scuole medie l' operetta stessa, sotto una qualunque delle forme con cui si è presentata al pubblico.

G. L.

Digitized by Google

D. HILBERT. — *Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren.* Leipzig, Teubner, 1903, 8.° p. V + 175. (Prezzo del vol. leg. Mk 5.60).

Fra le ricerche compiute in questi ultimi anni sopra i fondamenti della geometria nessuna può competere per importanza con quelle adunate nello studio di cui ora annunciamo una nuova edizione. Tale importanza venne segnalata, all'apposizione di quello scritto, da chi in queste colonne ne rese conto (v. *Bollettino.* T. III, 1800, p. 3-7); la necessità di una nuova edizione attesta che quel lusinghiero giudizio venne generalmente pronunziato.

Siccome la nuova edizione non differisce dalla prima che per ritocchi nei particolari, così ci riteniamo esonerati da una analisi particolareggiata, basta notare che in quella vennero riprodotte sotto forma di note, cinque notevoli memorie posteriormente pubblicate dall'illustre autore nei *Math. Annales* T. 46, 56 e 57), nei *Procedings of the Lond. math. Society* (T. 35) e nelle *Transactions of the American math. Society* (T. II).

G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DEI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

CORSO DI MATEMATICHE SUPERIORI

Anno 1903-1904.

1. Varietà di funzioni comprese tra limiti finiti. — Condizione necessaria e sufficiente perchè vi sia per essa una funzione limite continua. — Funzioni egualmente oscillanti: egualmente continue. — Criteri atti a riconoscere siffatte proprietà.

2. Esistenza degli integrali nell'equazione

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è continua.

Digitized by Google

Condizione di Cauchy-Lipschitz sufficiente per l' unicità. — Esempi. Sistemi di equazioni. — Metodo delle approssimazioni successive. — Applicazione di esso anche ad equazioni del 2.° ordine.

3. Rappresentazione approssimata delle funzioni continue, mediante polinomi. — Integrazione approssimata delle equazioni differenziali mediante polinomi. — Limite dell' approssimazione. — Esistenza degli integrali nel caso di $f(x, y)$ funzione analitica.

4. Funzioni armoniche. — Prime formule generali. — Funzione di Green. — Massimi e minimi. — Procedimento di Riemann per stabilire l'esistenza della funzione con valori prefissati al contorno. — Esempio di Weierstrass che ne mette in luce l'insufficienza. — Integrale di Gauss. — Integrale di Neumann. Caso del cerchio. — Proposizione di Liouville. — Funzione analitica delle variabili x e y. — Rappresentazione approssimata di una funzione continua dedotta dall' integrale di Poisson.

5. Funzioni a variazione limitata. — Secondo teorema della media per gli integrali semplici. — Teoremi fondamentali sul limite dell' integrale di un prodotto, di cui un fattore dipende da un parametro. — Serie trigonometriche. — Somma della serie di Fourier. — Formula di Fourier per un intervallo infinito. — Applicazioni. — Secondo teorema della media per gli integrali doppi: per un rettangolo. per un contorno di Neumann.

6. Studi di Fejer sulla serie di Fourier. — Convergenza delle medie aritmetiche delle somme parziali di Fourier.

Conseguenze; applicazioni. — Teoria di Hurwitz sopra le costanti di Fourier. (Vedi *Math. Annalen*, T. 57).

7. Calcolo delle variazioni secondo le lezioni di Weierstrass. — Condizione necessaria per l' annullamento della prima variazione. — Applicazioni. — La seconda variazione. — Trasformazione di Lagrange. — Seconda condizione. — Ricerche di Jacobi — Terza condizione. — Definizione geometrica dei punti coniugati — Quarta condizione.

Prof. C. ARZELÀ.

Digitized by Google

NOTIZIE

Al III Congresso internazionale di matematica presero parte 31[illegible] matematici; e cioè: 155 *tedeschi*, 25 *francesi*, ed altrettanti *russi*, 24 *austro-ungheresi*, 12 *inglesi*, ed altrettanti *nord-americani*, 11 *italiani*, 10 *danesi*, ed altrettanti *norvego-svegesi*, 9 *svizzeri*, 5 *olandesi*, 2 *belgi*, 2 *rumeni*, 2 *greci*, 1 *sud-americano*, 1 *spagnuolo* ed 1 *giapponese*; finalmente 2 di residenza ignota ed 1 abitante di Sofia.

Com' è noto, il Congresso comprendeva sei sezioni (cioè: I. *Aritmetica ed Algebra*, II *Analisi*, III *Geometria*, IV *Matematica applicata*, V *Storia*, VI *Pedagogia*), che ebbero per organizzatori rispettivamente: I Kneser e Lüroth; II Hilbert e Schwarz; III Brill, Meyer e Schur; IV Hauck, Klein e Runge; V Cantor e Stäckel; VI Schubert e Treutlein. A presiedere le sedute delle varie sezioni furono per acclamazione chiamati: I Netto, Selivanoff; II Hadamard, Levi-Civita, Lindelof, Mittag-Leffler, III Geiser, Guichard, Morley, Segre. Zeuthen; IV Börsch, Finsterwalder, Hadamard, Klein, Vleck, Volterra; V Braunmühl, Loria, Tannery, Zeuthen; VI Fehr, Greenhill, Gubler, Schotten.

Le comunicazioni fatte furono rispettivamente 13, 14, 21, 15, 10, 20, di cui *sette* da italiani, cioè: Capelli, nelle Sezioni I e II; Levi-Civita, nella IV; Loria, nelle V e VI; Volterra, nella IV, e Vailati, nella V. Non vanno poi dimenticate le conferenze generali, tenute dal Painlevé (in francese), dal Greenhill (in inglese), dal Segre (in italiano), dal Wirtinger (in tedesco).

Nella seduta inaugurale il Konigsberger commemorò degnamente Jacobi, mentre in altre sedute generali vennero presentati il I volume della grande *Enciclopedia* « delle quattro accademie » nonchè il primo fascicolo della traduzione francese di essa, ed una storia della società matematica tedesca; vennero inoltre fatti voti per l'insegnamento della storia delle matematiche e perchè l' Istituzione Carnegie accordi i fondi necessari alla pubblicazione delle opere complete di Eulero.

Da ultimo va ricordato l' interessantissima esposizione di modelli ed apparati matematici.

Nella seduta di chiusura il prof. Volterra, in nome dell'Accademia dei Lincei e del Circolo matematico di Palermo, propose l' Italia come sede del IV Congresso: tale proposta venne approvata ad unanimità. In quell' occasione verrà conferito un premio di L. 3000, per un concorso di geometria istituito dal Circolo matematico di Palermo, con un fondo posto generosamente a sua disposizione dal prof. Guccia (1).

1) Il programma di concorso verrà presto pubblicato.

Digitized by Google

TEMA DI CONCORSO PROPOSTO DALLA FACOLTÀ FILOSOFICA DI GOTTINGA: « La funzione *entropia* introdotta da Clausius nella termodinamica, ha assunto un significato ampio e profondo in seguito ai lavori di Gibbs, Planck, Boltzmann, Lorentz ed altri. Ora la Facoltà desidera una esposizione completa dell'ufficio disimpegnato da tale funzione nei vari rami della fisica e della chimica, nella quale sia tenuto conto anche delle varie interpretazioni meccaniche ed elettrodinamiche dell'entropia. »

I lavori dei concorrenti devono essere scritti in una lingua moderna e presentati entro il 31 Agosto 1906.

* * *

SULLA MATEMATICA DEI GIAPPONESI porge interessanti notizie Ventura Reyes Prosper in un articolo (che verrà continuato) inserito nel T. I della *Revista de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid*, di recente fondazione (Aprile 1904).

* * *

TEMA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DEL BELGIO. « Si domanda un contributo importante alla teoria dei complessi di rette del 3.° ordine, p. es. lo studio di quelli rappresentati da un'equazione della forma $\alpha\beta\gamma - k\alpha'\beta'\gamma' = 0$, ove $\alpha = 0$ $\beta = 0$, ... sono le equazioni di altrettanti complessi lineari e k un parametro ».

Premio di fr. 600. Le memorie dei concorrenti devono essere scritte in francese od in fiammingo ed essere presentate alla Segreteria prima del 1.° Agosto 1905.

* * *

NEL II CONGRESSO INTERNAZIONALE DI FILOSOFIA che ebbe luogo a Ginevra dall'8 al 12 dello Scorso Settembre non mancarono le Comunicazioni di soggetti attinenti alle scienze fisiche e matematiche. Esse si ripartirono nelle tre Sezioni di Filosofia delle Scienze, di Logica e di Storia delle Scienze. Nelle prime due si ebbero, tra le altre, una Comunicazione di I. Andrade sulla *Geometria meccanica*, un'altra di P. Boutroux sul *Concetto di corrispondenza nell' analisi matematica*, una di L. Couturat sulla *Logica algoritmica*, due di G. Itelson *sui rapporti tra la logica e la matematica* e su *Spinoza e il metodo geometrico*; una infine, molto discussa, del colonnello L. Hartmann *Sulla definizione fisica di forza.*

Digitized by Google

Nella Sezione di Storia delle Scienze, presieduta da *P. Tannery*, furono lette una Communicazione del Duhem (Bordeaux) su un punto di Storia della dinamica (*L'accelerazione come effetto d'una forza costante*), e una dello Zeuthen (Copenhagen) sulle origini della geometria scientifica (*Il teorema di Pitagora*). H. Berr, direttore della « Revue de Synthèse Historique », presentò un frammento d'un suo studio su *Gassendi come storico delle scienze;* F. Mentré (Ecole de Roches de Vermeuil) un interessante saggio sulla *Simultaneità delle scoperte scientifiche;* il barone Carra de Vaux (École des Hautes Études) richiamò opportunamente l'attenzione sul materiale interessante per la Storia della meccanica antica giacente quasi ignorato nei Musei archeologici, accennando a un caso tipico, quello d'una lampada artistica conservata in un Museo italiano, la quale presenta traccie di fori adatti all'applicazione dissimulata d'un congegno pel mantenimento dell'olio a livello costante, analogo a quelli che si trovano descritti da Erone nella sua *Pneumatica*. La Sezione formulò a tale proposito un voto, che trovò unanime appoggio alla Seduta generale, in favore della concessione di maggiori opportunità, da parte delle Direzioni dei Musei, agli Scienziati che intendessero procedere a ricerche del materiale affidato alla loro custodia. Un altro voto della Sezione di Storia delle Scienze, pure ratificato dall'adunanza generale delle Sezioni, si riferì all'opportunità di istituire speciali cattedre universitarie sulla Storia delle Scienze matematiche e fisiche, non che su quella delle Scienze mediche e naturali, e di concedere una parte più importante alla Storia delle Scienze nei programmi dell'insegnamento secondario. A tale riguardo il Congresso si associò alla proposta formulata dallo stesso P. Tannery al III Congresso internazionale di Matematica (Heidelberg) e coincidente a quella già presentata e favorevolmente accolta al Congresso storico internazionale di Roma (1903).

G. Vailati.

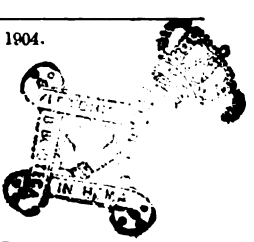
* * *

Tema posto a concorso dal R. Istituto Veneto, « Perfezionare in qualche punto importante la geometria proiettiva delle superficie algebriche a due dimensioni dello spazio ad n dimensioni. »

Premio L. 3000. Scadenza 31 dicembre 1906. Le memorie dei concorrenti dovranno essere presentate anonime ed essere scritte in italiano, francese, tedesco od inglese.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1904.



Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

GINO LORIA

Professore ordinario dell' Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

INDICE:

CAP. I. — Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.
CAP. II. — Teoria delle curve piane algebriche.
CAP. IV. — Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.
CAP. V. — Geometria differenziale.
CAP. VI. — Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni
CAP. VII. — Geometria della retta nello spazio.
CAP. VIII. — Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.
CAP. IX. — Geometria numerativa.
CAP. X. — Geometria non-euclidea.
CAP. XI. — Geometria degli spazi a quantesivogliono dimensioni.
CAP. XII. — Epilogo.

GINO LORIA

ord. Professor d. höheren Geometrie an der Universität Genua

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figuren auf 17 lithographirten Tafeln

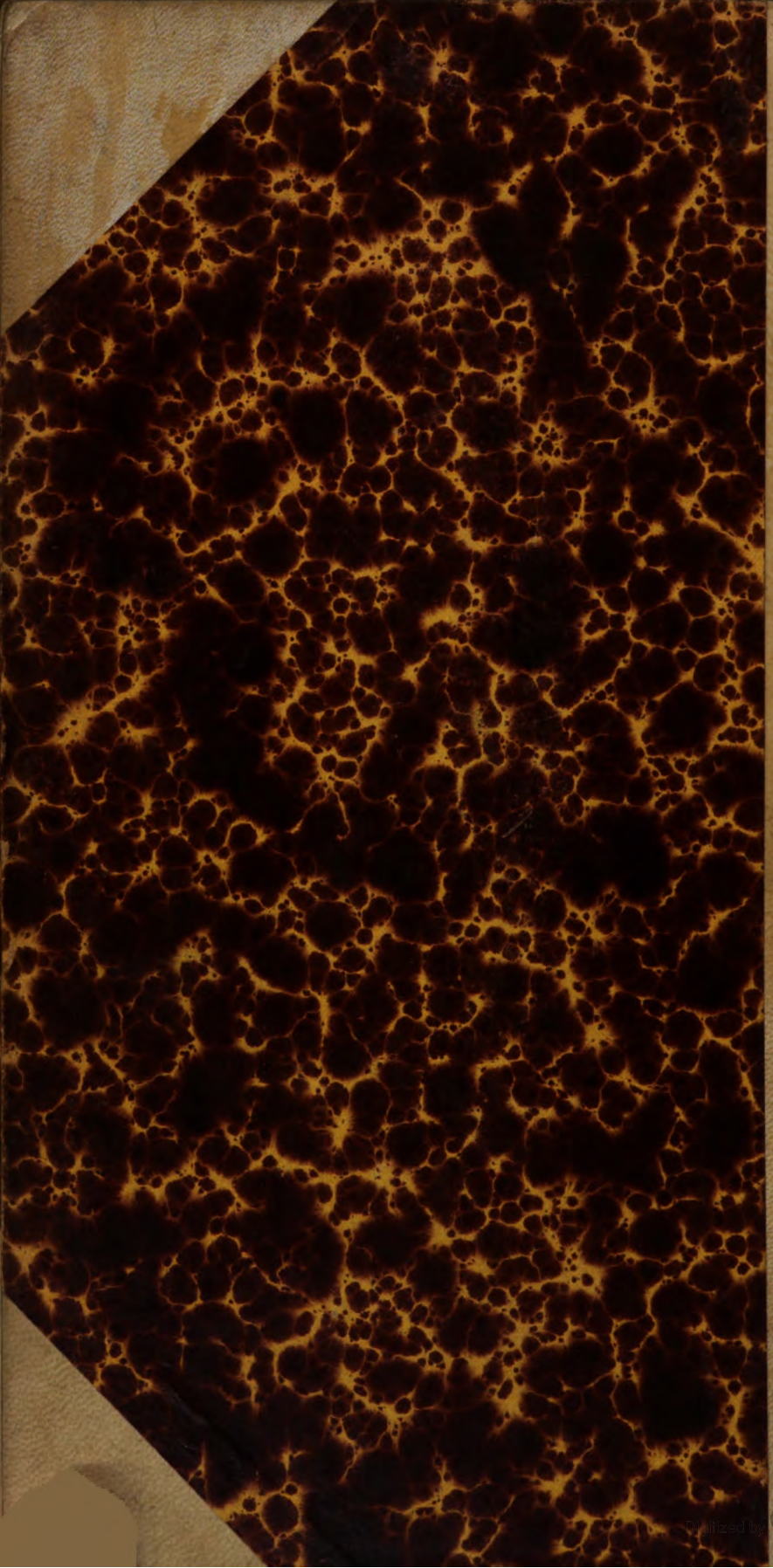
Mark 28.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google